

Fakulta elektrotechniky a informatiky
Technická univerzita v Košiciach

Fyzikálne meranie

Zuzana Gibová

Košice, 2019

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

Fyzikálne meranie

Zuzana Gibová

Košice, 2019

RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

Fyzikálne meranie

Prvé vydanie 2019

Copyright © Zuzana Gibová

Rukopis neprešiel redakčnou a jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-553-3318-2

Obsah

	Predhovor.....	7
1.	Meranie fyzikálnych veličín	9
	1.1 Meranie a metóda merania.....	11
2.	Chyby a neistoty merania, zápis výsledku merania	18
	2.1 Chyby merania, relatívna a absolútna chyba.....	20
	2.2 Neistoty merania.....	25
	2.3 Určenie štandardných neistôt pre rôzne metódy merania.....	36
	2.3.1 Jednorazové priame meranie.....	36
	2.3.2 Jednorazové nepriame meranie.....	37
	2.3.3 Opakované priame meranie.....	40
	2.3.4 Opakované nepriame meranie.....	43
	2.4 Zásady pre zápis a zaokrúhľovanie nameraných veličín, neistôt a chýb.....	48
	2.4.1 Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie hodnoty chyby a neistoty.....	48
	2.4.2 Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie hodnoty nameranej veličiny.....	49
	2.4.3 Zápis výsledku.....	51
3.	Spracovanie výsledkov merania	55
	3.1 Grafické spracovanie.....	57
	3.2 Metóda najmenších štvorcov.....	61
	3.2.1 Lineárna závislosť typu $y = ax + b$	63
	3.2.2 Lineárna závislosť typu $y = ax$	67
	3.2.3 Voľba funkcie na fitovanie.....	70
	3.3 Interpolácia a extrapolácia.....	76
	3.3.1 Interpolácia	76
	3.3.1 Extrapolácia	77
	3.4 Počítačový program SciDavis.....	79
4.	Systém IP - Coach	99
	4.1 Systém IP - Coach.....	101
	4.2 Softvér Coach 5.....	103
	4.2.1 Otvorenie programu a voľba úlohy na meranie.....	103
	4.2.2 Meranie, videomeranie a spustenie merania	105
	4.2.3 Spracovanie nameraných hodnôt.....	108
	4.3 Softvér Coach 6.....	123
5.	Meracie prístroje	126
	5.1 Meradlá dĺžky.....	127
	5.1.1 Pásmové a posuvné meradlo.....	127
	5.1.2 Mikrometer.....	129
	5.2 Meradlá času – stopky.....	130
	5.3 Meradlá hmotnosti.....	131
	5.4 Meradlá teploty.....	133
	5.4.1 Teplomer.....	133
	5.4.2 Pyrometer.....	133
	5.5 Meradlá napätia, prúdu a odporu.....	134
	Výsledky	140
	Použitá literatúra	155

Predhovor

Učebný text Fyzikálne meranie je určený pre študentov bakalárskeho štúdia študijného programu Fyzikálne inžinierstvo progresívnych materiálov na Technickej univerzite v Košiciach. Zaoberá sa problematikou fyzikálneho merania. Obsahuje teóriu týkajúcu sa merania, doplnenú príkladmi a úlohami na precvičenie.

Cieľom predkladanej učebnice je naučiť študentov správne postupovať pri meraní na laboratórnych cvičeniach z fyziky v rámci predmetu Fyzikálne meranie. Okrem toho sa majú študenti naučiť spracovať odmerané hodnoty, správne ich zapísať a interpretovať výsledky merania. Študenti sa oboznámia aj s počítačovým systémom IP - Coach pomocou, ktorého budú merať niektoré laboratórne úlohy a spracovávať namerané hodnoty. Súčasne sa naučia používať voľne dostupný počítačový program SciDavis na spracovanie nameraných dát.

S problematikou fyzikálneho merania sa stretávajú aj študenti niektorých študijných programov na Fakulte elektrotechniky a informatiky, ale v menšom rozsahu. Preto je tento učebný materiál vhodným doplnkovým študijným materiálom aj pre týchto študentov.

Zuzana Gibová

Vysvetlivky používané v texte:



Text pri tejto značke predstavuje doplňujúcu poznámku k textu.

Napríklad: *Za týmto označením sa nachádza ukážka z praxe k spomínanej problematike.*



Preskúšajte sa – za každou podkapitolou je súbor úloh na precvičenie. Výsledky úloh sú na konci učebnice.



Pri tomto symbole sú v texte uvedené motivačné otázky, na ktoré sa odpovie ďalej v texte.

1 Meranie fyzikálnych veličín

Ako môžeme odmerať hustotu materiálu, z ktorého je vyrobený červený valček na obrázku?

Ovplyvní počet meraní získaný výsledok?



Základné pojmy:

meranie, fyzikálna veličina, metóda merania, metóda jednorazového a opakovaného merania, výberový priemer, priame a nepriame metódy, absolútne a relatívne metódy, statické a dynamické metódy

V tejto kapitole vysvetlíme, čo rozumieme pod pojmom meranie a pod pojmom metóda merania. Uvedieme niektoré metódy merania, s ktorými sa stretneme pri meraní v našom študentskom laboratóriu a spomenieme aj príklady na jednotlivé metódy merania.

1.1 Meranie a metóda merania

S meraním sa stretávame v našom každodennom živote. Napr. maliari pri miešaní farieb odmeriavajú rôzne hmotnosti a objemy farieb, ktoré budú miešať. Pri kupovaní oblečenia napr. nohavíc, potrebujeme vedieť obvod pásu, či bokov. Meranie je aj základom každej experimentálnej vedy, kvalitnej výroby a stáleho technického rozvoja. Ako definujeme meranie vo fyzike?



Pod **meraním** rozumieme proces získavania číselnej hodnoty fyzikálnej veličiny v zvolených jednotkách. Spôsob jej určenia nazývame **metóda merania**.



Fyzikálna veličina x je definovaná ako súčin jej číselnej hodnoty $\{x\}$ a jej jednotky (x): $x = \{x\}(x)$. Napríklad sila $F = 30 \text{ N}$, kde 30 je číselná hodnota fyzikálnej veličiny sila a N je jej jednotka.

Každú meranú veličinu môžeme merať viacerými metódami, závisí to najmä od druhu fyzikálnej veličiny a od prístrojového vybavenia. Na laboratórnych cvičeniach z fyziky sa využívajú nasledujúce metódy merania:

a) metóda jednorazového a opakovaného merania

Ak fyzikálnu veličinu odmeriame meracím prístrojom raz, ide o **jednorazové meranie**.

Napríklad: Raz odmeriame teplotu vody v kalorimetri pomocou teplomera; $t = 53,4 \text{ }^\circ\text{C}$.

Najjednoduchší spôsob, ako spresniť výsledok merania, je meranie viackrát zopakovať. Meranie, pri ktorom danú veličinu odmeriame niekoľkokrát (obvyklý počet meraní na laboratórnych cvičeniach je 10), sa nazýva **opakované meranie**. Opakovaným meraním získame súbor nameraných hodnôt x_1, \dots, x_n , z ktorého určíme ako výsledok merania **výberový (aritmetický) priemer**, kde n je počet meraní

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (1.1)$$

Napríklad: Pomocou tejto metódy môžeme odmerať 10-krát výšku hliníkového valčeka. Za výslednú hodnotu výšky budeme pokladať výberový priemer z jednotlivých odmeraných

výšok

$$\bar{h} = \frac{1}{10}(61,23 + 61,45 + 61,78 + 61,75 + 61,45 + 61,52 + 61,68 + 61,61 + 61,59 + 61,39) = 61,545 \text{ mm.}$$



Špeciálnym prípadom opakovaného merania je **metóda postupných meraní**, ktorú možno použiť v prípade, ak začiatok každého nasledujúceho merania je totožný s koncom predchádzajúceho merania.

b) priame a nepriame metódy

Ak hodnotu meranej veličiny určíme priamym odčítaním zo stupnice meracieho prístroja, hovoríme, že je meraná **priamo**.

Napríklad: Pri meraní hrúbky tenkej doštičky pomocou mikrometra (obr. 1), odčítaná hodnota na stupnici mikrometra určuje priamo hodnotu hrúbky doštičky: $h = 4,583 \text{ mm}$.



Obr. 1

Merateľ veličinu **nepriamo** znamená, že samotná veličina x , ktorej hodnotu chceme zistiť, je funkciou viacerých veličín rôzneho druhu $x = f(y_1, \dots, y_k)$, ktoré sa merajú. Ak poznáme hodnoty y_1, \dots, y_k , potom pomocou nich vieme určiť hodnotu meranej veličiny x .



Hodnotu meranej veličiny pri nepriamej metóde neodčítame priamo zo stupnice prístroja, neodmeriame ju, ale vypočítame podľa vzťahu - funkčného predpisu $x = f(y_1, \dots, y_k)$, ktorým je daná, kde veličiny y_1, \dots, y_k sú odmerané priamo.

c) absolútne a relatívne metódy

Absolútne metódy poskytujú priamo číselnú hodnotu meranej veličiny. **Relatívne (porovnávacie) metódy** vyjadrujú podiel dvoch veličín toho istého druhu, pričom hodnota jednej z porovnávaných veličín musí byť známa.

Napríklad: Pomocou porovnávacej metódy je možné určiť odpor kovového vodiča R porovnaním podielu jeho odporu a známeho odporu R_n s podielom napätia U kovového vodiča a napätia U_n na známom odpore R_n pri tej istej teplote:

$$\frac{R}{R_n} = \frac{U}{U_n} . \text{ Odtiaľ pre odpor kovového vodiča } R = R_n \frac{U}{U_n} .$$

d) statické a dynamické metódy

Ak meraná veličina a aj ostatné veličiny, s ktorými súvisí, majú stále (nemenné) hodnoty, ide o **statickú metódu**. Pri **dynamickej metóde** sa niektorá z veličín s časom mení.

Napríklad: Dynamická metóda sa využíva pri určovaní hmotnostného skupenského tepla topenia ľadu, kde sa teplota vody v kalorimetri mení s časom; $T = f(t)$.

Ako budeme postupovať v prípade, keď meranú veličinu budeme merať súčasne pomocou viacerých metód? Ako bude daná hodnota meranej veličiny?



Pri meraní sa často používajú viaceré metódy súčasne. Na našich meraniach budeme používať nasledujúce metódy: **metódu jednorazového priameho merania**, **metódu jednorazového nepriameho merania**, **metódu opakovaného priameho merania** a **metódu opakovaného nepriameho merania** (podrobnejšie v [tab. 1](#)).

V prípade opakovaného nepriameho merania pri spracovaní hodnôt musíme brať do úvahy, že meraná veličina závisí od viacerých veličín y_i , ktoré sa merajú niekoľkokrát. Preto najprv určíme výberový priemer každej veličiny podľa vzťahu (1.1). Hodnota meranej veličiny $x = f(y_1, \dots, y_k)$ bude daná výberovým priemerom $\bar{x} = f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k)$.

Napríklad: Pri určovaní objemu valčeka pomocou jeho rozmerov sa metódou opakovaného nepriameho merania najprv určí opakovaným meraním výška valca h a jeho priemer d . Potom sa vypočítajú ich výberové priemery \bar{h} , \bar{d} , pomocou ktorých sa určí objem valčeka výpočtom ako $\bar{V} = \frac{\pi \bar{d}^2}{4} \bar{h}$.

Metóda	Veličina	Spracovanie
jednorazové priame meranie	x	výsledok merania: x príklad: $t = 100$ s
opakované priame meranie	x ako súbor x_1, x_2, \dots, x_n	1 odmeriame súbor hodnôt x_1, x_2, \dots, x_n meranej veličiny 2. vypočítame výberový priemer = výsledok merania: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ príklad: odmeraný súbor hodnôt výšok hranola: $l_1 = 8,208$ cm, $l_2 = 8,21$ cm, $l_3 = 8,206$ cm, $l_4 = 8,207$ cm, $l_5 = 8,21$ cm $\bar{l} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 l_i = 8,2082$ cm
jednorazové nepriame meranie	$x = f(y_1, \dots, y_k)$, kde y_1, \dots, y_k sú veličiny rôzneho druhu	1. odmeriame y_1, \dots, y_k 2. dosadíme do funkčného predpisu pre meranú veličinu $x = f(y_1, \dots, y_k)$ a vypočítame hodnotu meranej veličiny = výsledok merania príklad: $v = f(s, t)$, $s = 0,702$ m, $t = 22,34$ s $v = \frac{s}{t} = \frac{0,702}{22,34} = 0,03142$ m/s
opakované nepriame meranie	$\bar{x} = f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)$, kde y_1, \dots, y_k sú veličiny rôzneho druhu	1. odmeriame n - krát každú veličinu y_1, \dots, y_k 2. vypočítame výberový priemer každej veličiny podľa vzťahu (1.1) 3. dosadíme výberové priemery do funkčného predpisu pre meranú veličinu $\bar{x} = f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)$ a vypočítame hodnotu meranej veličiny = výsledok merania príklad: $v = f(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3)$, $s_1 = 0,703$ m, $s_2 = 0,701$ m, $s_3 = 0,701$ m, $t_1 = 22,34$ s, $t_2 = 22,35$ s, $t_3 = 22,34$ s $\bar{s} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 s_i = 0,702$ m $\bar{t} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 t_i = 22,34$ s $\bar{v} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}} = \frac{0,702}{22,34} = 0,03138$ m/s

Tab. 1

Pri určovaní hustoty materiálu červeného valčeka spomenutého v úvode kapitoly, môžeme použiť metódu jednorazového nepriameho merania. Hustota je definovaná ako podiel hmotnosti a objemu valčeka. Hmotnosť určíme priamo, odvážením pomocou váh. Objem nepriamo, odmeraním rozmerov valčeka pomocou príslušných meradiel a následným výpočtom. Hustotu materiálu valčeka dostaneme dosadením hmotnosti a objemu do vzťahu pre hustotu. Ak niektoré z veličín vstupujúcich do výpočtu odmeriame viackrát, teda použijeme metódu opakovaného nepriameho merania, potom výsledok merania bude presnejší.



Preskúšajte sa – 1.1

1. Rozhodnite, aké metódy merania boli použité v nasledujúcich príkladoch:
- Pásmovým meradlom bola odmeraná dĺžka drôtu, ktorý bol napínaný pomocou závaží, $l = 0,8$ m.
 - Moment zotrvačnosti štvorcovej dosky zanedbateľnej hrúbky bol určený pomocou vzťahu $I = \frac{1}{12}mb^2$, kde odmerané veličiny boli strana dosky $b = 30$ cm a jej hmotnosť $m = 0,45$ kg.
 - Hmotnosť kovového valčeka bola 10-krát odmeraná pomocou váh.
 - Pri určovaní doby jedného kmitu matematického kyvadla sme dostali súbor hodnôt časového intervalu, za ktorý matematické kyvadlo urobilo 50 kmitov:
 $t_1 = 103$ s, $t_2 = 106$ s, $t_3 = 105$ s, $t_4 = 104$ s, $t_5 = 106$ s, $t_6 = 103$ s, $t_7 = 104$ s.
 - Výška hranola bola určená ako $\bar{h} = 7,59$ cm zo súboru odmeraných výšok hranola.
 - Hmotnosť vody v kalorimetri bola určená z rozdielu hmotnosti kalorimetra s vodou a hmotnosti prázdneho kalorimetra.
 - Teplota vody v nádobe bola určená ako súbor hodnôt:
 $t_1 = 21^\circ\text{C}$, $t_2 = 20,5^\circ\text{C}$, $t_3 = 20,8^\circ\text{C}$, $t_4 = 20,7^\circ\text{C}$, $t_5 = 21^\circ\text{C}$,
 $t_6 = 20,6^\circ\text{C}$, $t_7 = 20,8^\circ\text{C}$, $t_8 = 20,6^\circ\text{C}$, $t_9 = 20,8^\circ\text{C}$, $t_{10} = 20,6^\circ\text{C}$.
 - Tuhosť pružiny k sa určila pomocou vzťahu $F = kx$. Pri meraní sa pružina natiahla vplyvom pôsobiacej sily $F = 0,015$ N o hodnotu $x = 0,05$ m.
 - Pri určovaní pôsobiacej sily ($F = ma$) na vozíček pri rovnomerne zrýchlenom priamočiariom pohybe, sa odmerali hmotnosť vozíčka (m) a jeho zrýchlenie (a) ako súbor hodnôt v nasledujúcej tabuľke:

m (g)	500,12	500,15	500,13	500,12	500
a (m/s ²)	2,01	1,95	1,99	1,98	2,01

Určte výsledok merania v jednotlivých príkladoch.

[Odpovede](#)

V úlohách 2 - 4 vyberte správne tvrdenie.

2. Pri metóde jednorazového nepriameho merania je výsledok merania daný:

- a) priamo odmeranou hodnotou,
- b) ako funkcia premenných veličín, ktoré odmeriame jedenkrát,
- c) výberovým priemerom.

[Odpoveď](#)

3. Pri metóde opakovaného nepriameho merania je výsledok merania daný:

- a) ako funkcia premenných veličín, ktoré odmeriame niekoľkokrát,
- b) priamo odmeranou hodnotou meranej veličiny,
- c) jednou hodnotou zo súboru hodnôt.

[Odpoveď](#)

4. Pri metóde jednorazového priameho merania je výsledok merania daný:

- a) priamo odmeranou hodnotou,
- b) súborom hodnôt x_1, \dots, x_n ,
- c) výberovým priemerom.

[Odpoveď](#)

5. Pri dynamickej metóde

- a) sa meraná veličina nemení s časom,
- b) je porovnávaná s inou veličinou toho istého druhu,
- c) sa meraná veličina mení s časom,
- d) je priamo meraná hodnota meranej veličiny.

[Odpoveď](#)

6. Vyberte, ktorá odpoveď z 5. úlohy je správna pre

- a) porovnávaciu metódu,
- b) absolútnu metódu,
- c) statickú metódu.

[Odpoveď](#)

2 Chyby a neistoty merania, zápis výsledku merania

Akej chyby sa môžeme dopustiť pri meraní na stopkách?

Ako určíme ich presnosť?



Základné pojmy:

chyba merania, hrubé chyby, systematické chyby, náhodné chyby, absolútna chyba merania, relatívna chyba merania, neistota merania, absolútna štandardná neistota, relatívna štandardná neistota, maximálna dovolená odchýlka meracieho zariadenia, trieda presnosti, rozšírená neistota

Úlohou merania je nielen určiť hodnotu meranej veličiny, ale tiež odhadnúť chybu merania a neistotu, ktorej sa dopustíme pri meraní. V tejto časti sa sústreďíme na definovanie chyby merania z hľadiska fyziky, rozdelíme chyby podľa pôvodu ich vzniku. Vysvetlíme, čo rozumieme pod pojmom neistota a ukážeme ako sa líši od chyby merania. V závere zavedieme pravidlá pre správne zaokrúhľovanie nameraných veličín, chýb a neistôt a ukážeme ako správne zapísať výsledok merania.

2.1 Chyby merania, relatívna a absolútna chyba

V predchádzajúcej kapitole sme sa dozvedeli, čo je to meranie z hľadiska fyziky a čo rozumieme pod pojmom metóda merania. Presnosť merania ovplyvňuje chyba merania. Ako je definovaná chyba merania? Kedy sa dopustíme chyby pri meraní a ako ju môžeme eliminovať?



Pod **chybou** merania rozumieme rozdiel medzi nameranou hodnotou a skutočnou (pravou) hodnotou meranej veličiny.

Skutočná hodnota veličiny je ideálny pojem, jej hodnota nie je presne známa. Preto sa zavádza tzv. *konvenčne pravá hodnota* x_p , ktorá predstavuje hodnotu veličiny dostatočne blízku ku skutočnej hodnote. Za konvenčne pravú hodnotu môžeme pokladať tabuľkovú hodnotu (napr.: tabuľková hodnota Boltzmanovej konštanty je $k_{\text{tab}} = 1,38,10^{-23}$ J/K), výberový priemer meranej veličiny alebo hodnotu meranej veličiny určenú z definície.

Zdrojom chýb pri meraniach môžu byť nedokonalosti meracích prístrojov, nevhodnosť zvolených meracích metód, nekontrolovateľné zmeny podmienok, ako aj chyby experimentátora.

Podľa pôvodu delíme chyby:

a) Hrubé chyby - vznikajú nedbalosťou experimentátora, napr. chybným odčítaním údajov z prístroja. Ich výskyt môžeme zistiť pri opakovaných meraniach. Ak sa v súbore nameraných veličín jedna z nich výrazne líši od ostatných, môžeme predpokladať, že táto veličina je zaťažená hrubou chybou a *pri spracovaní ju neberieme do úvahy*.

Príklad 1: Zistite, ktorá hodnota dĺžky zo súboru odmeraných dĺžok je zaťažená hrubou chybou. Súbor odmeraných dĺžok: $l_1 = 2$ m, $l_2 = 2,05$ m, $l_3 = 2,3$ m, $l_4 = 2,01$ m, $l_5 = 2,02$ m, $l_6 = 2,01$ m, $l_7 = 2,02$ m, $l_8 = 2$ m, $l_9 = 2,04$ m, $l_{10} = 2,03$ m.

Výrazne sa líši hodnota $l_3 = 2,3$ m. **Tretia odmeraná hodnota dĺžky je zaťažená hrubou chybou**, preto ju nebudeme pri spracovaní hodnôt brať do úvahy a budeme vyhodnocovať len zvyšných deväť nameraných hodnôt.

b) Systematické (sústavné chyby) - majú pôvod v použitej metóde merania, v meracích prístrojoch alebo v osobe experimentátora (tzv. osobná chyba – napr. zotrvačnosť pri stlačení stopiek). Sústavné chyby sa líšia od hrubých chýb tým, že výsledok merania je buď stále väčší alebo stále menší ako správna hodnota preto nie sú jednoducho identifikovateľné.

Napríklad: Pri určovaní tiažového zrýchlenia pre Košice ($g_{tab} = 9,80916 \text{ m/s}^2$) odmeriame súbor hodnôt $g_1 = 9,818 \text{ m/s}^2$, $g_2 = 9,821 \text{ m/s}^2$, $g_3 = 9,819 \text{ m/s}^2$, $g_4 = 9,820 \text{ m/s}^2$, $g_5 = 9,818 \text{ m/s}^2$, ktoré sú o niečo väčšie ako je tabuľková hodnota tiažového zrýchlenia.

c) Náhodné chyby – tieto chyby vznikajú náhodne vplyvom prostredia (napr. zmena teploty v laboratóriu, prúdenie vzduchu) alebo prebiehajúcich dejov v prístrojoch (napr. trenie), ktoré limitujú ich presnosť. Pri týchto chybách nevieme predpokladať, kedy nastanú. Napriek tomu náhodnosť dejov, ktoré spôsobujú tieto chyby, sa dá matematicky opísať pomocou matematickej štatistiky a teórie pravdepodobnosti ako to ukážeme v časti [2.2](#).

Pri spracovaní nameraných hodnôt budeme vyhodnocovať presnosť merania pomocou absolútnej a relatívnej chyby.

Pod **absolútnou chybou merania** rozumieme rozdiel medzi výsledkom merania x_e a konvenčne pravou hodnotou meranej veličiny x_p .

Jej matematický zápis

$$\Delta x = x_e - x_p. \quad (2.1)$$

Jednotka absolútnej chyby merania je rovnaká ako jednotka meranej veličiny. Absolútna chyba môže nadobúdať aj záporné hodnoty.

Napríklad: $\Delta l = 0,02 \text{ m}$, $\Delta C = -0,11 \text{ }\mu\text{F}$, $\Delta \sigma = -1,2702 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

Relatívna chyba merania je definovaná ako podiel absolútnej hodnoty absolútnej chyby merania a konvenčne pravej hodnoty meranej veličiny.

Relatívna chyba predstavuje kladnú číselnú hodnotu, často sa vyjadruje v percentách, jej matematické vyjadrenie je

$$\delta_x = \frac{|\Delta x|}{x_p} = \frac{|x_e - x_p|}{x_p} \quad (2.2) \quad \text{alebo} \quad \delta_{x\%} = \frac{|\Delta x|}{x_p} 100\% = \frac{|x_e - x_p|}{x_p} 100\% . \quad (2.3)$$

Příklad 2: Vypočítajte absolútnu a relatívnu chybu merania tiažového zrýchlenia, ak hodnota tiažového zrýchlenia určená meraním je $g_e = 9,828845 \text{ m/s}^2$ a tabuľková hodnota tiažového zrýchlenia $g_{tab} = 9,80916 \text{ m/s}^2$.

Pri výpočte absolútnej chyby využijeme vzťah (2.1), kde za x_e dosadíme hodnotu tiažového zrýchlenia získanú meraním $g_e = 9,828845 \text{ m/s}^2$. V našom prípade konvenčne pravú hodnotu x_p predstavuje tabuľková hodnota tiažového zrýchlenia $g_{tab} = g_p = 9,80916 \text{ m/s}^2$. Potom absolútna chyba

$$\Delta g = g_e - g_p = 9,828845 - 9,80916 = 0,019685 \text{ m/s}^2.$$

Relatívnu chybu vypočítame pomocou vzťahu (2.3)

$$\delta_{g\%} = \frac{|g_e - g_p|}{g_p} 100\% = \frac{|9,828845 - 9,80916|}{9,80916} 100\% = 0,2006\% .$$

Absolútna chyba merania tiažového zrýchlenia je $0,019685 \text{ m/s}^2$ a relatívna chyba je $0,2006\%$. (Vypočítané hodnoty nie sú zatiaľ zaokrúhlené podľa pravidiel pre zaokrúhľovanie, viac v časti 2.4).



Preskúšajte sa – 2.1

- Rozhodnite, či pri nasledujúcich meraniach bolo meranie zaťažené hrubou alebo systematickou chybou:
 - súbor odmeraných hodnôt doby kmitu fyzikálneho kyvadla:
1,183 s; 1,182 s; 1,185 s; 1,3 s; 1,184 s; 1,182 s; 1,185 s; 1,182 s; 1,184 s; 1,183 s,
 - súbor hodnôt odmeranej molárnej plynovej konštanty ($R_{\text{tab}} = 8,314 \text{ J/K}$):
8,297 J/K; 8,301 J/K; 8,298 J/K; 8,300 J/K; 8,299 J/K; 8,301 J/K; 8,298 J/K,
 - súbor hodnôt priemeru guľôčky: [Odpovede](#)
1,139 cm; 1,137 cm; 1,5 cm; 1,138 cm; 1,136 cm; 1,136 cm; 1,137 cm; 1,46 cm.
- Hmotnosť hliníkového valčeka bola určená ako súbor 10 – tich hodnôt:
 $m_1 = 9,87 \text{ g}$, $m_2 = 9,89 \text{ g}$, $m_3 = 9,87 \text{ g}$, $m_4 = 9,88 \text{ g}$, $m_5 = 9,88 \text{ g}$,
 $m_6 = 9,89 \text{ g}$, $m_7 = 9,87 \text{ g}$, $m_8 = 9,88 \text{ g}$, $m_9 = 9,89 \text{ g}$, $m_{10} = 9,88 \text{ g}$.
 - Určte konvenčne pravú hodnotu hmotnosti valčeka.
 - Vypočítajte absolútnu a relatívnu chybu merania pre šieste meranie. [Výsledky](#)
- Frekvencia kmitov ladičky bola určená ako súbor 5 – tich hodnôt:
 $f_1 = 441,08 \text{ Hz}$, $f_2 = 439,49 \text{ Hz}$, $f_3 = 439,49 \text{ Hz}$, $f_4 = 441,08 \text{ Hz}$, $f_5 = 439,49 \text{ Hz}$.
Výrobca uvádza frekvenciu ladičky 440 Hz.
 - Určte výberový priemer frekvencie ladičky.
 - Vypočítajte absolútnu a relatívnu chybu merania pre výberový priemer frekvencie.
 - Vypočítajte absolútnu a relatívnu chybu merania pre piate meranie.
Ako ovplyvnil výsledok a chybu merania počet meraní?
- Absolútna chyba momentu zotrvačnosti obdĺžnikovej dosky je $-1,584 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$.
Vypočítajte relatívnu chybu momentu zotrvačnosti, ak konvenčne pravá hodnota momentu zotrvačnosti je $I_p = 0,011052 \text{ kg.m}^2$. [Výsledky](#)
- Vypočítajte absolútnu chybu merania Planckovej konštanty, ak relatívna chyba merania bola 13,2 % a tabuľková hodnota Planckovej konštanty je $h_{\text{tab}} = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$. Aká je hodnota odmeranej hodnoty Planckovej konštanty? [Výsledky](#)
- Vyberte správny zápis relatívnej a absolútnej chyby tiažového zrýchlenia
 - $\Delta g = -0,03 \text{ m/s}^2$,
 - $\Delta g = -0,08$,

- c) $\delta_{g\%} = 0,53 \%$,
- d) $\delta_{g\%} = 354,2 \%$,
- e) $\Delta g = 0,0284 \text{ m/s}$,
- f) $\delta_{g\%} = - 0,3 \%$.

[Odpovede](#)

7. Vyberte správne tvrdenie. Konvenčne pravá hodnota
 - a) je skutočná hodnota veličiny,
 - b) predstavuje chybu merania,
 - c) je hodnota dostatočne blízka ku skutočnej hodnote.

8. Vyberte správne tvrdenie. Hrubé chyby sú
 - a) chyby spôsobené konštrukciou prístroja,
 - b) chyby, ktoré vznikajú nedbalosťou experimentátora,
 - c) chyby, ktoré vznikajú pri jednorazovom meraní.

9. Vyberte správne tvrdenie. Systematické chyby
 - a) sú spôsobené aj osobou chybou experimentátora,
 - b) sú ľahšie identifikovateľné ako hrubé chyby,
 - c) spôsobujú, že výsledok merania je väčší aj menší ako správna hodnota. [Odpovede](#)

10. Vyberte správne tvrdenie. Náhodné chyby
 - a) nastanú pri každom meraní,
 - b) vznikajú v dôsledku zlého odčítania hodnoty meranej veličiny zo stupnice prístroja,
 - c) vznikajú v dôsledku náhodných vplyvom prostredia.

11. Doplňte tvrdenia:
 - a) Veličinu zaťaženú hrubou chybou pri spracovaní
 - b) Chyba merania je definovaná ako rozdiel medzi nameranou hodnotou a
 - c) Tabuľková hodnota meranej veličiny predstavuje
 - d) Relatívna chyba sa vyjadruje v
 - e) Jednotkou absolútnej chyby je

[Odpovede](#)

2.2 Neistoty merania

Už vieme, čo je chyba merania, od čoho závisí a ako ju môžeme vypočítať. Pri meraniach sa stretáme aj s neistotou merania, ktorá tiež vyjadruje presnosť merania. Ako je definovaná a ako sa líši od chyby merania?



Neistota merania je parameter charakterizujúci interval hodnôt meranej veličiny okolo výsledku merania, ktorý podľa očakávania obsahuje skutočnú hodnotu veličiny. Je kvantitatívnym ukazovateľom výsledku a vyjadruje aj kvalitu merania.

Kým chyba je daná len jedným číslom (napr. absolútna chyba $\Delta I = -0,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$), neistota u_x určuje interval hodnôt $(x - u_x, x + u_x)$, čo budeme zapisovať $(x \pm u_x)$.

Napríklad: Pri meraní momentu zotrvačnosti obdĺžnikovej dosky pomocou fyzikálneho kyvadla bola odmeraná hodnota momentu zotrvačnosti vyjadrená pomocou neistoty v tvare intervalu $I = (4,77 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Výraz $\pm 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ je neistota merania, ktorá vyjadruje interval, v ktorom sa nachádza meraná veličina. V tomto prípade je moment zotrvačnosti z intervalu $I \in (4,77 \cdot 10^{-3} - 0,02 \cdot 10^{-3}, 4,77 \cdot 10^{-3} + 0,02 \cdot 10^{-3}) \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Pri určovaní neistoty sa vychádza z teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky pre náhodné procesy (náhodné chyby). Základnou kvantitatívnou charakteristikou neistoty je štandardná neistota u . Pri spracovaní nameraných hodnôt sa rozlišuje absolútna štandardná neistota a relatívna štandardná neistota.

Absolútnu štandardnú neistotu veličiny x označujeme u_x . Jej matematické vyjadrenie závisí od metódy merania meranej veličiny a je vyjadrená v jednotkách meranej veličiny. Väčšinou je daná kombinovanou štandardnou neistotou.

V prípade priameho merania absolútnu štandardnú neistotu predstavuje **kombinovaná štandardná neistota**

$$u_{Cx} = \sqrt{u_{Ax}^2 + u_{Bx}^2}, \quad (2.4)$$

kde u_{Ax} je štandardná neistota typu A, u_{Bx} je štandardná neistota typu B.

Štandardná neistota typu A je daná výberovou smerodajnou odchýlkou výberového priemeru

$$u_{A\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2.5)$$

kde n je počet meraní, x_i je výsledok i -teho merania, výraz $x_i - \bar{x}$ predstavuje odchýlku meranej veličiny od skutočnej hodnoty (konvenčne pravej hodnoty). Štandardná neistota typu A vyjadruje neistotu výsledku získaného opakovaným meraním a zohľadňuje náhodné vplyvy pri meraní.



V prípade, že $n < 6$, je možné určiť štandardnú neistotu typu A jednoduchším spôsobom podľa vzťahu $u_{A\bar{x}} = k_n \Delta V$. Výraz k_n je koeficient závislý od počtu meraní. Pre $n = 2$ je $k_n = 0,886$, pre $n = 3$ je $k_n = 0,59$, pre $n = 4$ je $k_n = 0,486$ a pre $n = 5$ je $k_n = 0,43$. Veličina ΔV je variačné rozpätie, ktoré definované ako rozdiel najväčšej a najmenšej hodnoty meranej veličiny.

Štandardná neistota typu B vyjadruje neistotu, ktorá je spôsobená najmä konštrukciou prístroja, ktorým je veličina meraná. V prípade rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti odchýliek $x_i - \bar{x}$ pre štandardnú neistotu typu B platí

$$u_{Bz} = \frac{z_{\max}}{\sqrt{3}}, \quad (2.6)$$

kde z_{\max} je maximálna dovolená odchýlka meracieho zariadenia.



Ak by rozdelenie pravdepodobnosti odchýliek nebolo rovnomerné, potom by štandardná neistota typu B bola definovaná v inom tvare. Najčastejšie sa predpokladá rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti.

Maximálna dovolená odchýlka predstavuje presnosť meracieho prístroja a jej určenie závisí od meracieho zariadenia a metódy merania.

V prípade priameho merania meranej veličiny príslušným meracím prístrojom ju určíme nasledovne:

a) Pri ručičkových elektrických meracích prístrojoch (analogových) je maximálna dovolená odchýlka na danom rozsahu daná **triedou presnosti p** (v %) a počíta sa podľa vzťahu

$$z_{\max} = \frac{p}{100} \cdot \text{rozsah}. \quad (2.7)$$

Príklad 3: Určte presnosť - maximálnu dovolenú odchýlku voltmetra, pomocou ktorého bola odmeraná hodnota napätia na rozsahu 60 V, ak trieda presnosti voltmetra je 0,5 %.

Na určenie presnosti voltmetra použijeme vzťah (2.7), kde $p = 0,5 \%$ a rozsah je 60 V. Potom

$$z_{\max} = U_{\max} = (0,5 / 100) \cdot 60 = 0,3 \text{ V}.$$

Maximálna dovolená odchýlka voltmetra na rozsahu 60 V bude 0,3 V.



Často je trieda presnosti uvedená na meracom prístroji ako číslo nad vlnovkou pri meraní so striedavým prúdom alebo nad rovnou čiarou pri meraní s jednosmerným prúdom (napr.: 0,5). Na niektorých meracích prístrojoch, ktoré používame v našich laboratóriách je trieda presnosti uvedená v dolnej časti stupnice (obr. 2).



Obr. 2

b) Pre všetky ostatné meracie prístroje (napr. teplomer, stopky, váhy, digitálny voltmeter) je maximálna dovolená odchýlka daná **hodnotou najmenšieho dielika stupnice**.

Príklad 4: Zistite maximálnu dovolenú odchýlku prístroja:

- a) pásmového meradla, ktorým odmeriame vzdialenosť dvoch bodov,
- b) digitálneho teplomera, ktorým odmeriame teplotu v miestnosti 21,46 °C.

- a) Pre pásmové meradlo je $z_{\max} = l_{\max} = 0,001$ m, lebo najmenší možný dielik, ktorý môžeme pomocou neho odmerať vzdialenosť, je 1 mm.
- b) Na digitálnom teplomeri, ktorým odmeriame teplotu v miestnosti 21,46 °C, je najmenší možný dielik 0,01 °C, potom $z_{\max} = t_{\max} = 0,01$ °C.

Maximálna dovolená odchýlka z_{\max} pásmového meradla je 1 mm a teplomera 0,01 °C.

Ako určíme maximálnu dovolenú odchýlku v prípade nepriameho merania? Bude sa postup jej určenia líšiť?



Pri nepriamom meraní veličiny x , keď $x = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$, maximálnu dovolenú odchýlku vypočítame podľa vzťahu

$$x_{\max}(y_1, \dots, y_n) = \left| \frac{\partial x}{\partial y_1} \right| y_{1\max} + \left| \frac{\partial x}{\partial y_2} \right| y_{2\max} + \dots + \left| \frac{\partial x}{\partial y_n} \right| y_{n\max} . \quad (2.8)$$

V špeciálnych prípadoch, ak sa hodnota meranej veličiny určuje ako

1. rozdiel alebo súčet dvoch rôznych nameraných veličín $x = y - z$, $x = y + z$, potom sa jej maximálna dovolená odchýlka určí podľa vzťahu (2.8)

$$x_{\max}(y, z) = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| y_{\max} + \left| \frac{\partial x}{\partial z} \right| z_{\max} = \left| \frac{\partial(y \pm z)}{\partial y} \right| y_{\max} + \left| \frac{\partial(y \pm z)}{\partial z} \right| z_{\max} = 1 \cdot y_{\max} + 1 \cdot z_{\max} = y_{\max} + z_{\max} .$$

Napríklad: Pri meraní hmotnostnej tepelnej kapacity kovového valčeka pomocou kalorimetra je hmotnosť vody v kalorimetri určená z rozdielu hmotnosti prázdneho kalorimetra m_1 a hmotnosti kalorimetra s vodou m_2 ; $m = m_1 - m_2$. Potom maximálna dovolená odchýlka určenia hmotnosti vody v kalorimetri bude daná súčtom maximálnych dovolených odchýliek

hmotnosti prázdneho kalorimetra m_{1max} a hmotnosti kalorimetra s vodou m_{2max}
 $m_{max} = m_{1max} + m_{2max} = 0,1 + 0,1 = 0,2 \text{ g}$.

2. podiel nameranej veličiny y a čísla k $x = \frac{y}{k}$, potom jej maximálna dovolená odchýlka sa určí podľa vzťahu (2.8) a bude daná podielom maximálnej dovolenej odchýlky meracieho prístroja y_{max} , ktorým sme merali príslušnú veličinu, a čísla k

$$x_{max}(y) = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| y_{max} = \left| \frac{\partial(\frac{y}{k})}{\partial y} \right| y_{max} = \frac{y_{max}}{k}.$$

Napríklad: Pri určovaní doby kmitu pomocou reverzného kyvadla sa pomocou digitálnych stopiek s presnosťou 0,01 s odmeria doba t , za ktorú reverzné kyvadlo vykoná 25 kmitov. Doba jedného kmitu $T = t / 25$. Maximálna dovolená odchýlka stopiek pri meraní jedného kmitu bude $T_{max} = t_{max} / 25 = 0,01 / 25 = 0,0004 \text{ s}$.

3. súčin čísla k a nameranej veličiny y $x = ky$, jej maximálna dovolená odchýlka sa určí podobným spôsobom ako v druhom prípade a bude daná súčinom čísla k a maximálnej dovolenej odchýlky meracieho prístroja y_{max} , ktorým sme merali príslušnú veličinu

$$x_{max} = ky_{max}.$$

Ako už bolo uvedené, opakovaným meraním môžeme spresniť výsledok merania danej veličiny. Redukujeme ním náhodné vplyvy. Metódu opakovaného merania veličiny použijeme vždy vtedy, ak pre meranie danej veličiny máme k dispozícii taký merací prístroj, ktorého maximálna dovolená odchýlka je menšia ako náhodné vplyvy, ktoré sa pri meraní veličiny vyskytujú.

Teraz už môžeme odpovedať na otázku z úvodu kapitoly, akých chýb sa dopustím pri meraní na stopkách a ako určíme ich presnosť. V prípade digitálnych stopiek sa presnosť určí ako najmenší dielik stupnice, čo je 0,01 s. Pri meraní pomocou stopiek sa najčastejšie môžeme dopustiť hrubých chýb a osobnej chyby, ktorá je spôsobená oneskoreným zapnutím alebo vypnutím stopiek.

Vieme ako je daná kombinovaná štandardná neistota v prípade priameho merania, Aký bude jej tvar v prípade nepriameho merania veličiny?



Pri určení **kombinovanej štandardnej neistoty** veličiny $x = f(y_1, \dots, y_k)$, ktorá bola odmeraná nepriamou metódou je výsledná **kombinovaná štandardná neistota** veličiny x daná výrazom

$$u_{cx} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x}{\partial y_i} \right)^2 u_{cy_i}^2}, \quad (2.9)$$

kde $\frac{\partial x}{\partial y_i} = \frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_k)}{\partial y_i}$ je parciálna derivácia veličiny x podľa veličiny y_i .



Podrobnejšie sa vyjadrením kombinovanej štandardnej neistoty pre rôzne metódy merania zaoberá časť [2.3](#).

Pod **relatívnou štandardnou neistotou** rozumieme podiel príslušnej absolútnej štandardnej neistoty u_x a nameranej veličiny x .

Matematické vyjadrenie relatívnej štandardnej neistoty

$$u_{rx} = \frac{u_x}{x} 100\% . \quad (2.10)$$

Niekedy je výhodne pri vyhodnocovaní výsledkov merania určiť najprv relatívnu štandardnú neistotu a potom pomocou nej určiť absolútnu štandardnú neistotu. Tento postup sa používa v prípade, ak je nepriamo meraná veličina x vyjadrená len súčinom a podielom priamo

meraných veličín napr.: $x = \frac{a^n b^m}{c^j d^k}$, kde j, k, m, n sú racionálne čísla.

Potom **relatívna štandardná neistota** je vyjadrená v tvare

$$u_{rx} = \frac{u_x}{x} = \sqrt{\left(n \frac{u_a}{a} \right)^2 + \left(m \frac{u_b}{b} \right)^2 + \left(j \frac{u_c}{c} \right)^2 + \left(k \frac{u_d}{d} \right)^2}, \quad (2.11)$$

kde u_a, u_b, u_c, u_d sú absolútne štandardné neistoty priamo meraných veličín a, b, c, d .

Absolútna štandardná neistota určená pomocou nej má tvar

$$u_x = u_{rx} x. \quad (2.12)$$

Napríklad: Vzťah pre tiažové zrýchlenie určené pomocou matematického kyvadla je v tvare súčinu a podielu priamo meraných veličín $g = \frac{4\pi^2}{T^2} l$. V takomto prípade najprv určíme

relatívnu štandardnú neistotu podľa (2.11) v tvare $u_{rg} = \sqrt{\left(2 \frac{u_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{u_l}{l}\right)^2}$ a pomocou nej potom absolútnu štandardnú neistotu $u_g = u_{rg} g$.

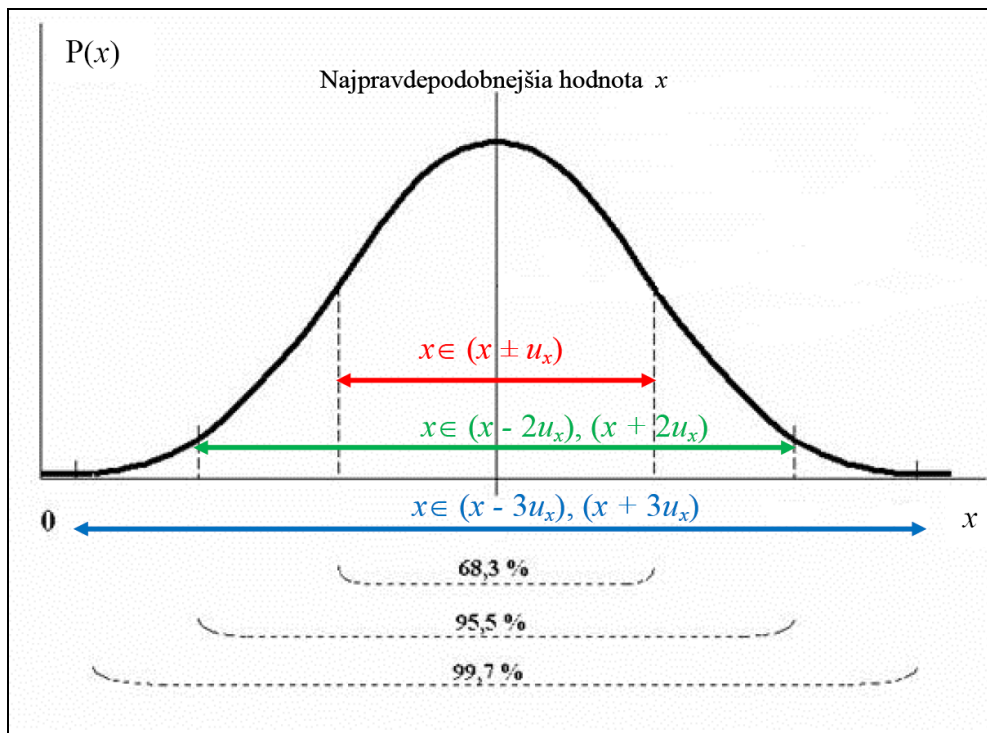
V úvode tejto podkapitoly sme spomenuli, že štandardné neistoty určujú interval hodnôt $(x \pm u_x)$. Podľa teórie pravdepodobnosti je to interval, v ktorom leží skutočná hodnota meranej veličiny s pravdepodobnosťou 68,3 % alebo 0,683. Teda v intervale $(x - u_x)$ až $(x + u_x)$, rozloženom symetricky okolo najpravdepodobnejšej hodnoty x , sa nachádza 68,3 % všetkých meraní alebo s pravdepodobnosťou 0,683 bude ľubovoľný výsledok merania patriť do tohto intervalu (obr. 3). V praxi sa často požaduje, aby hodnota neistoty vytvárala interval s väčšou pravdepodobnosťou pokrytia skutočnej hodnoty. Na toto vyjadrenie slúži rozšírená neistota U_x .

Rozšírená neistota je daná ako súčin kombinovanej neistoty a faktora rozšírenia (pokrytia) k .

Jej matematický zápis

$$U_x = k u_{Cx}, \quad (2.13)$$

kde hodnota faktora pokrytia k sa volí. Pre pravdepodobnosť 95,5 % je $k = 2$, pre pravdepodobnosť 99,7 %, $k = 3$. To znamená, že ak $k = 2$, potom skutočná hodnota meranej veličiny bude s pravdepodobnosťou 95,5 % ležať v intervale $(x \pm U_x) = (x \pm 2 u_{Cx})$.



Obr. 3

Napríklad: Pri opakovanom meraní pre $n = 10$ vyjadruje absolútna štandardná neistota u_x , že 68,3% všetkých meraní, čo je v tomto prípade 6 meraní, sa bude nachádzať v intervale $(x \pm u_x)$ okolo najpravdepodobnejšej hodnoty. Ak použijeme rozšírenú neistotu U_x s faktorom rozšírenia $k = 2$, potom zväčšíme počet odmeraných hodnôt, ktoré budú ležať v intervale $(x \pm U_x) = (x \pm 2u_x)$ okolo najpravdepodobnejšej hodnoty na deväť hodnôt.



Preskúšajte sa – 2.2

1. Určte maximálnu dovolenú odchýlku merania nasledujúcich meracích zariadení:
 - a) váh, ktorými bola určená hmotnosť obdĺžnikovej dosky 503,54 g,
 - b) ručičkového ampérmetra, ktorým bol odmeraný prúd na rozsahu 0,2 A pri triede presnosti 0,5 %,
 - c) pásmového meradla, ktorým boli odmerané dve vzdialenosti, ktorých rozdiel vyjadroval vzdialenosť do ktorej sa dostal zvuk,
 - d) digitálneho voltmetra, ktorého displej zobrazoval hodnotu 0,0124 V,
 - e) mikrometra na [obr.1](#) na str. 12,
 - f) všetkých odmeraných veličín v tab. 2, pri meraní neboli použité elektrické ručičkové prístroje, N – počet molekúl vzduchu.

[Odpovede](#)

V (ml)	p (kPa)	T (K)	$N \cdot 10^{23}$
20	101,9	296,19	0,00498
19	106,9	295,99	0,00497
18	112,5	295,99	0,00496

Tab. 2

2. Vypočítajte štandardnú neistotu typu B
 - a) teploty, ktorá bola určená pyrometrom, podľa výrobcu je presnosť pyrometra na rozsahu 700 – 1500 °C je 22 °C,
 - b) napätia, ktoré bolo odmerané pomocou ručičkového elektrického voltmetra na rozsahu 120 V, trieda presnosti bola 0,2 %,
 - c) objemu vzduchu v injekčnej striekačke, ak $V_{\max} = 0,001$ l.
3. Vyberte správne tvrdenie. Štandardná neistota typu B vyjadruje neistotu
 - a) ktorá je spôsobená experimentátorom,
 - b) ktorá je spôsobená konštrukciou prístroja,
 - c) ktorá vznikne pri opakovanom meraní.

[Odpovede](#)

[Odpoveď](#)

4. Vyberte správne tvrdenie. Maximálnu dovolenú odchýlku stopiek, ktorými sme odmerali čas 100,49 s, určíme
- ako najmenší dielik stupnice meradla,
 - ako najväčší dielik stupnice meradla,
 - pomocou triedy presnosti na danom rozsahu prístroja.
- Napište hodnotu maximálnej dovolenej odchýlky pre tento prípad. [Odpoveď](#)
5. Vyberte správne tvrdenie. Štandardná neistota typu A vyjadruje neistotu
- ktorá je spôsobená experimentátorom,
 - ktorá je spôsobená konštrukciou prístroja,
 - ktorá vznikne pri opakovanom meraní.
6. Vyberte správne tvrdenie. Trieda presnosti ampérmetra je 0,2 % na rozsahu 5 A. Maximálne dovolená odchýlka ampérmetra bude
- $I_{\max} = 0,2 \text{ A}$,
 - $I_{\max} = 0,01 \text{ A}$,
 - $I_{\max} = 0,05 \text{ A}$.
- [Odpoveď](#)
7. Vyberte správne tvrdenie. Neistota merania
- vyjadruje skutočnú hodnotu veličiny,
 - vyjadruje chybu merania,
 - vyjadruje interval hodnôt meranej veličiny okolo výsledku merania.
8. Vyberte správne tvrdenie. Maximálna dovolená odchýlka meracieho zariadenia
- predstavuje maximálnu hodnotu meranej veličiny,
 - vyjadruje presnosť meracieho prístroja,
 - je vždy daná najmenším dielikom zo stupnice meracieho prístroja.
- [Odpoveď](#)
9. Vyberte správne tvrdenie. Maximálna dovolená odchýlka meranej veličiny x , ktorá bola určená pri nepriamom meraní ako $x = y - z$ je daná
- y_{\max} / z_{\max} ,
 - $y_{\max} - z_{\max}$,
 - $y_{\max} + z_{\max}$.
10. Priemer guľôčky bol odmeraný priamo viackrát. Vypočítajte štandardnú neistotu typu B priemeru guľôčky, ak maximálna dovolená odchýlka mikrometra, ktorým bol priemer guľôčky meraný je $0,05 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Vypočítajte štandardnú neistotu typu A priemeru guľôčky, ak kombinovaná štandardná neistota priemeru je $2,93 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. [Výsledky](#)
11. Vypočítajte výberový priemer a štandardnú neistotu typu A priemeru 10 rovnakých guľôčok: $d_1 = 8,01 \text{ mm}$, $d_2 = 7,99 \text{ mm}$, $d_3 = 7,98 \text{ mm}$, $d_4 = 8,00 \text{ mm}$, $d_5 = 7,99 \text{ mm}$,

$d_6 = 7,98 \text{ mm}$, $d_7 = 8,01 \text{ mm}$, $d_8 = 7,98 \text{ mm}$, $d_9 = 7,98 \text{ mm}$, $d_{10} = 8,02 \text{ mm}$.

12. Vypočítajte výberový priemer brzdneho napätia fotónky. Určte štandardnú neistotu typu A brzdneho napätia podľa vzťahu (2.5) a približného vzťahu $u_{A\bar{x}} = k_n \Delta V$, kde $k_n = 0,43$. Porovnajte presnosť výpočtu obidvoma spôsobmi. Interval odmeraných piatich hodnôt napätia je 0,082 V; 0,089 V; 0,085 V; 0,090 V; 0,083 V. [Výsledky](#)
 13. Vypočítajte relatívnu a absolútnu štandardnú neistotu momentu zotrvačnosti štvorcovej dosky ($I = \frac{1}{12}mb^2$), kde strana dosky $b = 30 \text{ cm}$, hmotnosť dosky $m = 0,45 \text{ kg}$, $u_b = 1 \text{ mm}$ a $u_m = 0,05 \text{ g}$.
 14. Vypočítajte relatívnu a absolútnu štandardnú neistotu objemu valčeka s podstavou priemeru 15,69 mm a výškou 53,2 mm. Absolútna štandardná neistota výšky valčeka je $2,886 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ a priemeru $5,77 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. [Výsledky](#)
 15. Vypočítajte absolútnu a relatívnu štandardnú neistotu merania odporu, ak rozšírená neistota $U_R = 0,3836 \Omega$ a faktor rozšírenia je 2. Hodnota odporu je 53Ω .
 16. Určte maximálnu dovolenú odchýlku veličiny $z = x \cdot y$, kde x a y sú priamo odmerané veličiny. [Výsledky](#)
-

2.3 Určenie štandardných neistôt pre rôzne metódy merania

V kapitole 1, sme uviedli, že môžeme merať veličinu pomocou kombinácie viacerých metód. Potom vyjadrenie absolútnej a relatívnej štandardnej neistoty bude závisieť od metódy merania, čo sme už čiastočne naznačili v časti 2.2. V tejto podkapitole sa budeme venovať podrobnejšie vyjadreniu štandardných neistôt pre jednotlivé metódy.

2.3.1 Jednorazové priame meranie

Pri tejto metóde odmeriame hodnotu meranej veličiny x raz a priamo odčítame jej hodnotu zo stupnice meradla. Potom *absolútna štandardná neistota* bude daná štandardnou neistotou typu B, ktorú získame úpravou kombinovanej štandardnej neistoty (2.4) v tvare

$$u_{Cx} = u_{Bx} = \frac{z_{\max}}{\sqrt{3}}, \quad (2.14)$$

kde z_{\max} je maximálna dovolená odchýlka meracieho zariadenia.



Vzťah (2.14) vyplynul z kombinovanej štandardnej neistoty, kde vypadol člen $u_{A\bar{x}}$ z výrazu $u_{Cx} = \sqrt{u_{A\bar{x}}^2 + u_{Bx}^2}$, pretože sme meranie uskutočnili raz a tento člen sa týka opakovaného merania.

Relatívna štandardná neistota bude daná vzťahom (2.10) v tvare

$$u_{rx} = \frac{u_{Cx}}{x} 100\% .$$

Príklad 5: Vypočítajte absolútnu a relatívnu štandardnú neistotu merania teploty vody v kalorimetri. Teplota vody bola odmeraná raz pomocou teplomera, ktorého stupnica zobrazovala hodnotu teploty 65,3 °C.

Presnosť teplomera je daná hodnotou najmenšieho dielika $t_{\max} = 0,1$ °C (vyplyva to z údajov na displeji teplomera 65,3 °C). Potom absolútna štandardná neistota bude daná vzťahom (2.14)

$$u_{Ct} = u_{Bt} = \frac{t_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,0577 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Relatívna štandardná neistota merania teploty vody je

$$u_{rt} = \frac{u_{Ct}}{t} 100 \% = \frac{0,0577}{65,3} 100 \% = 0,088 \%$$

Absolútna štandardná neistota merania teploty vody v kalorimetri je 0,0577 °C a relatívna štandardná neistota je 0,088 %. (Vypočítané hodnoty nie sú zatiaľ zaokrúhlené podľa pravidiel pre zaokrúhľovanie, viac v časti [2.4](#)).

2.3.2 Jednorazové nepriame meranie

V tomto prípade je meraná veličina x funkciou veličín rôzneho druhu $x = f(y_1, \dots, y_k)$, ktoré odmeriame raz. Potom *absolútna štandardná neistota* bude daná kombinovanou štandardnou neistotou pre nepriame meranie (2.9) v tvare

$$u_{Cx} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x}{\partial y_i} \right)^2 u_{Cy_i}^2}, \quad (2.15)$$

kde $u_{Cy_i} = u_{By_i} = \frac{y_{i\max}}{\sqrt{3}}$.

Napríklad: Ak je $x = f(y_1, y_2, y_3)$, potom (2.15) bude mať tvar

$$u_{Cx} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \right)^2 u_{By_1}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_2} \right)^2 u_{By_2}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_3} \right)^2 u_{By_3}^2}.$$



Vo vzťahu (2.15) je $u_{Cy_i} = u_{By_i}$ pretože sme jednotlivé y_i merali len raz, podobne ako vo vzťahu (2.14) neberieme do úvahy člen $u_{A\bar{y}_i}$.

Relatívna štandardná neistota bude určená vzťahom (2.10)

$$u_{rx} = \frac{u_{Cx}}{x} 100 \%,$$

kde meraná veličina x je určená pomocou funkčného predpisu $x = f(y_1, \dots, y_k)$.



Keď vyhodnocujeme neistoty pre jedno meranie zo série opakovaného nepriameho merania (jeden riadok z tabuľky), používame rovnaký postup ako pri metóde jednorazového nepriameho merania.

Príklad 6: Vypočítajte hodnotu tiažového zrýchlenia pomocou odmeraných hodnôt dĺžky závesu a doby kmitu jednoduchého kyvadla pre piate meranie ($l_5 = 1,24 \text{ m}$, $T_5 = 2,194 \text{ s}$). Určte príslušné neistoty pre toto meranie.

Hodnota tiažového zrýchlenia sa meria nepriamo, pomocou jednoduchého kyvadla. Pri meraní sa odmeria doba, za ktorú vykoná kyvadlo pri danej dĺžke l závesu 50 kmitov a následne sa vypočíta doba kmitu kyvadla T . Tiažové zrýchlenie je funkciou dvoch premenných $g = f(l, T)$, od ktorých závisí podľa vzťahu

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l. \quad (1)$$

Potom tiažové zrýchlenie pre 5. riadok je dané

$$g_5 = \frac{4\pi^2}{T_5^2} l_5 = \frac{4 \cdot 3,14^2}{2,194^2} 1,24 = 10,159 \text{ m/s}^2.$$

Na určenie absolútnej štandardnej neistoty použijeme vzťah (2.15), podľa ktorého

$$u_{Cg_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u_{BT}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u_{Bl}^2}, \quad (2)$$

kde $\frac{\partial g}{\partial T}$ a $\frac{\partial g}{\partial l}$ sú derivácie vzťahu (1) podľa T a l a u_{BT} , u_{Bl} sú príslušné štandardné neistoty typu B.

Derivácie

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{4\pi^2}{T^2} l \right) = \frac{4\pi^2 \cdot (-2)}{T^3} l = \frac{-8\pi^2}{T^3} l,$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{4\pi^2}{T^2} l \right) = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \text{dosadíme do (2).}$$

Štandardné neistoty typu B sú vyjadrené pomocou maximálnych dovolených odchýliek meracích zariadení, ktorými boli stopky a dĺžkové meradlo. Ich presnosť je daná najmenším dielikom na stupnici. Stopky majú presnosť 0,01 s. Pri meraní na stopkách sa dopúšťame nepresností pri zapnutí aj vypnutí stopiek, preto $2 \cdot 0,01 = 0,02 \text{ s}$. Súčasne sa dopúšťame

osobnej chyby v dôsledku zotrvačnosti pri zapínaní a vypínaní stopiek, ktorá je 0,1 s na jedno zapnutie, teda $2 \cdot 0,1 = 0,2$ s. Potom $t_{\max} = 0,02 + 0,2 = 0,22$ s. Doba jedného kmitu jednoduchého kyvadla sa určí z merania času, za ktorý urobí kyvadlo 50 kmitov.

Je určená s presnosťou $T_{\max} = \frac{0,22}{50} = 0,0044$ s, (pozri [podiel](#) na str. 29). Pri určovaní dĺžky závesu kyvadla sa odmeria dĺžka závesu po spodok guľôčky x pásmovým meradlom a raz sa odmeria priemer guľôčky posuvným meradlom, ktorej polomer $r = \frac{d}{2}$. Potom dĺžka závesu l bude daná vzťahom $l = x - r$. Presnosť pásmového meradla je $x_{\max} = 0,001$ m a posuvného meradla $d_{\max} = 0,00005$ m je určená najmenším dielikom.

Presnosť merania dĺžky závesu potom bude $l_{\max} = x_{\max} + \frac{d_{\max}}{2} = 0,001 + 0,000025 = 0,001025$ m (viď. [rozdiel](#) na str. 28).

Štandardné neistoty typu B pre pásmové a posuvné meradlo budú

$$u_{Bl} = \frac{l_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{1,025 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3}} \text{ s},$$

$$u_{BT} = \frac{T_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{0,0044}{\sqrt{3}} \text{ s}.$$

Dosadením u_{Bl} a u_{BT} do (2)

$$u_{cg_5} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u_{BT}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u_{Bl}^2} = \sqrt{\left(\frac{-8\pi^2}{2,194^3} 1,24\right)^2 (25,4 \cdot 10^{-4})^2 + \left(\frac{4\pi^2}{2,194^2}\right)^2 (5,9 \cdot 10^{-4})^2}$$

$$u_{cg_5} = 5,07 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Relatívna štandardná neistota

$$u_{rg_5} = \frac{u_{cg_5}}{g_5} \cdot 100\% = \frac{5,07 \cdot 10^{-3}}{10,159} \cdot 100\% = 0,049 \%,$$

kde za hodnotu g_5 sme dosadili hodnota tiažového zrýchlenia pre piaty riadok podľa (1).

Tiažové zrýchlenie pre piaty riadok je 10,159 m/s², absolútna štandardná neistota je 5,07·10⁻³ m/s² a relatívna štandardná neistota 0,049 %. (Vypočítané hodnoty nie sú zatiaľ zaokrúhlené podľa pravidiel pre zaokrúhľovanie, viac v časti [2.4](#)).

Pri tejto metóde môžeme hodnotiť ako do absolútnej štandardnej neistoty prispievajú jednotlivé merané veličiny (y_1, \dots, y_k), resp. meranie ktorej veličiny je najviac zaťažené chybou alebo pri meraní ktorej veličiny sa dopúšťame najväčšej nepresnosti. To zistíme tak, že porovnáme číselné hodnoty jednotlivých členov $\left| \frac{\partial x}{\partial y_i} \right| u_{B y_i}$ z absolútnej štandardnej neistoty (2.15). Najväčšia číselná hodnota príslušného člena naznačuje veličinu, ktorá najviac prispieva do absolútnej štandardnej neistoty.

Príklad 7: Zistite, meranie ktorej veličiny prispieva najviac do absolútnej štandardnej neistoty pri meraní momentu zotrvačnosti pomocou fyzikálneho kyvadla. Odmerané hodnoty sú $x = 0,225 \text{ m}$, $m = 0,5305 \text{ kg}$, $T = 1,162 \text{ s}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Maximálne dovolené odchýlky meracích prístrojov sú $m_{\max} = 0,0001 \text{ kg}$, $x_{\max} = 0,001 \text{ m}$, $T_{\max} = 0,00066 \text{ s}$.

Moment zotrvačnosti bol meraný nepriamo pomocou fyzikálneho kyvadla. Jeho hodnota sa určí podľa vzťahu $I = \frac{mgxT^2}{4\pi^2} - mx^2$, kde merané veličiny sú vzdialenosť osi rotácie od ťažiska x , hmotnosť fyzikálneho kyvadla m a perióda kyvadla T , teda $I = f(m, x, T)$.

Pri zisťovaní, ktorá veličina najviac prispieva do neistoty, urobíme parciálne derivácie momentu zotrvačnosti podľa jednotlivých meraných veličín, vynásobíme ich príslušnými štandardnými neistotami typu B a dosadíme odmerané hodnoty veličín

$$\left| \frac{\partial I}{\partial m} \right| u_{Bm} = \left| \frac{\partial I}{\partial m} \right| \frac{m_{\max}}{\sqrt{3}} = \left| \frac{gxT^2}{4\pi^2} - x^2 \right| \frac{m_{\max}}{\sqrt{3}} = 1,435 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\left| \frac{\partial I}{\partial x} \right| u_{Bx} = \left| \frac{\partial I}{\partial x} \right| \frac{x_{\max}}{\sqrt{3}} = \left| \frac{mgT^2}{4\pi^2} - 2mx \right| \frac{x_{\max}}{\sqrt{3}} = 3,495 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\left| \frac{\partial I}{\partial T} \right| u_{BT} = \left| \frac{\partial I}{\partial T} \right| \frac{T_{\max}}{\sqrt{3}} = \left| \frac{mgx2T}{4\pi^2} \right| \frac{T_{\max}}{\sqrt{3}} = 2,629 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Porovnaním výsledných číselných hodnôt dostávame, že číselná hodnota je najväčšia pri druhom člene (derivácií podľa x).

Meranie vzdialenosti osi rotácie od ťažiska x prispieva najviac do absolútnej štandardnej neistoty, teda pri meraní x sme sa dopustili najväčšej chyby.

2.3.3 Opakované priame meranie

Pri opakovanom priamom meraní je meraná veličina odmeraná niekoľkokrát, pričom jej hodnotu odčítame priamo z meracieho prístroja. Dostaneme súbor hodnôt meranej veličiny x_1, \dots, x_n pomocou ktorého určíme hodnotu meranej veličiny ako výberový priemer (1.1). Pri

vyhodnotení merania musíme brať do úvahy chyby, ktoré vznikli pri opakovanom meraní (štandardná neistota typu A) a aj presnosť meracieho prístroja (štandardná neistota typu B).

Potom *absolútna štandardná neistota* bude daná kombinovanou štandardnou neistotou pre priame meranie v tvare

$$u_{C_x} = \sqrt{u_{A_{\bar{x}}}^2 + u_{B_x}^2},$$

kde štandardnú neistotu typu A určíme podľa vzťahu

$$u_{A_{\bar{x}}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

a štandardnú neistotu typu B podľa

$$u_{B_x} = \frac{z_{\max}}{\sqrt{3}}.$$

Relatívna štandardná neistota bude určená vzťahom (2.10) v tvare

$$u_{rx} = \frac{u_{C_x}}{\bar{x}} 100\%, \quad (2.16)$$

kde \bar{x} je výberový priemer súboru hodnôt meranej veličiny daný vzťahom (1.1).

Príklad 8: Spracujte namerané hodnoty priemerov 10 guľôčok (v tab. 3) a vyhodnoňte príslušne neistoty. Maximálna dovolená odchýlka meracieho zariadenia, ktorým boli určené priemery guľôčok je $d_{\max} = 0,05 \cdot 10^{-3}$ m.

i	$d_i \cdot 10^{-3}$ (m)	$(d_i - \bar{d}) \cdot 10^{-3}$ (m)	$(d_i - \bar{d})^2 \cdot 10^{-6}$ (m ²)
1	5,94	0,019	0,000361
2	5,90	-0,021	0,000441
3	5,91	-0,011	0,000121
4	5,93	0,009	0,000081
5	5,90	-0,021	0,000441
6	5,93	0,009	0,000081
7	5,94	0,019	0,000361
8	5,91	-0,011	0,000121
9	5,92	-0,001	0,000001
10	5,93	0,009	0,000081

Tab. 3

Určíme výberový priemer priemeru guľôčky, $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{59,21 \cdot 10^{-3}}{10} = 5,921 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Pomocou neho vypočítame odchýlky jednotlivých meraní od výberového priemeru $d_i - \bar{d}$ (3. stĺpec, tab. 3). Tieto odchýlky umocníme (4. stĺpec, tab. 3) a určíme ich súčet $\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2$, ktorý použijeme na určenie štandardnej neistoty typu A priemeru guľôčky $u_{A\bar{d}}$.

Kombinovanú štandardnú neistotu pre priemer guľôčky vypočítame pomocou vzťahu $u_{C\bar{d}} = \sqrt{u_{A\bar{d}}^2 + u_{B\bar{d}}^2}$. Najprv však potrebujeme vedieť hodnoty štandardných neistôt typu A a typu B. Štandardnú neistotu typu A vypočítame pomocou vzťahu (2.5)

$$u_{A\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot (10 - 1)} \sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2} = \sqrt{\frac{1}{90} \cdot 0,00209 \cdot 10^{-6}} = 0,000004818 \text{ m}.$$

Štandardná neistota typu B je podľa vzťahu (2.6) $u_{B\bar{d}} = \frac{d_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{0,05 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 0,000028867 \text{ m}$.

Potom kombinovaná štandardná neistota je

$$u_{C\bar{d}} = \sqrt{u_{A\bar{d}}^2 + u_{B\bar{d}}^2} = \sqrt{(0,000004818)^2 + (0,000028867)^2} = 0,000029266 \text{ m}.$$

Relatívna štandardná neistota podľa vzťahu (2.16)

$$u_{r\bar{d}} = \frac{u_{C\bar{d}}}{\bar{d}} 100 \% = \frac{0,000029266}{0,005921} 100 \% = 0,4942746 \%$$

Výberový priemer priemeru guľôčky je $5,921 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, absolútna štandardná neistota je $2,8867 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ a relatívna štandardná neistota $0,4942749 \%$. (Vypočítané hodnoty nie sú zatiaľ zaokrúhlené podľa pravidiel pre zaokrúhľovanie, viac v časti 2.4).

V prípade kombinovanej štandardnej neistoty (2.4) sa dá určiť *príspevok jednotlivých štandardných neistôt do kombinovanej štandardnej neistoty*. Porovnaním číselných hodnôt štandardnej neistoty typu A a typu B zistíme, ktoré meranie bolo menej presné, opakované meranie alebo meranie pomocou prístroja. Väčšia číselná hodnota danej neistoty, znamená väčší príspevok do celkovej neistoty a väčšiu chybu pri meraní.

V príklade 8 je štandardná neistota typu A menšia ako štandardná neistota typu B, čo znamená, že opakované meranie priemeru guľôčok spresnilo meranie, a že do celkovej

štandardnej neistoty prispieva väčšou chybou meranie pomocou použitého meracieho prístroja. To znamená, že ak by sme použili meradlo s lepšou presnosťou, mohli by sme spresniť výsledok merania.

2.3.4 Opakované nepriame meranie

Opakované nepriame meranie je z hľadiska spracovania nameraných hodnôt najnáročnejšie. V tomto prípade je meraná veličina funkciou viacerých veličín rôzneho druhu, ktoré odmeriame niekoľkokrát. Hodnota meranej veličiny je určená nepriamo pomocou výberových priemerov jednotlivých veličín $\bar{x} = f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k)$.

Absolútna štandardná neistota bude daná kombinovanou štandardnou neistotou (2.9) v tvare

$$u_{C\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}_i} \right)^2 u_{C\bar{y}_i}^2},$$

$$\text{kde } u_{C\bar{y}_i} = \sqrt{u_{A\bar{y}_i}^2 + u_{B\bar{y}_i}^2} \quad (2.17)$$

je kombinovaná štandardná neistota jednotlivých meraných veličín y_i .



Vo vzťahu (2.17) je zohľadnené, že každú veličinu y_i meriame opakovane (štandardná neistota typu A) a pomocou určitého meradla (štandardná neistota typu B).

Relatívna štandardná neistota je určená vzťahom (2.16)

$$u_{rx} = \frac{u_{Cx}}{\bar{x}} 100\%,$$

kde meraná veličina je určená pomocou daného funkčného predpisu $\bar{x} = f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k)$.

Príklad 9: Navrhните postup spracovania výsledkov aj so zápisom vzťahov v prípade nepriameho merania polomeru guľovej plochy pomocou sférometra. Pri meraní sa 10 - krát odmeria výška guľového vrchlíka (v) pomocou sférometra a 9 - krát vzdialenosť hrotov statívu (a) pomocou posuvného meradla. Polomer guľovej plochy je daný vzťahom

$$r = \frac{a^2}{6v} + \frac{v}{2}.$$

V tomto prípade bola pri meraní použitá metóda nepriameho opakovaného merania. Polomer guľovej plochy r je funkciou dvoch premenných $r = f(v, a)$, ktorých hodnoty boli určené opakovaným priamym meraním, preto najprv určíme výberové priemery výšky vrchlíka v a vzdialenosti hrotov statívu a

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^{10} v_i}{10}, \quad \bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^9 a_i}{9}.$$

Hodnota polomeru $r = f(v, a)$ bude daná ako $\bar{r} = f(\bar{v}, \bar{a})$ a vypočítame ju podľa vzťahu

$$\bar{r} = \frac{\bar{a}^2}{6\bar{v}} + \frac{\bar{v}}{2}.$$

Na určenie kombinovaných štandardných neistôt pre výšky vrchlíka v a vzdialenosti hrotov statívu a potrebujeme vypočítať štandardné neistoty typu A pre obidve premenné veličiny podľa vzťahu (2.5) a štandardné neistoty typu B podľa (2.6). Potom

$$u_{A\bar{v}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot (10-1)} \sum_{i=1}^{10} (v_i - \bar{v})^2}, \quad u_{A\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{9 \cdot (9-1)} \sum_{i=1}^9 (a_i - \bar{a})^2}.$$

Hodnota štandardnej neistoty typu B závisí od maximálnych dovolených odchýliek meracích prístrojov, ktorými boli merané výška vrchlíka (sférometer) a vzdialenosť hrotov (posuvné meradlo). Ich presnosť je daná hodnotou najmenšieho dielika na stupnici prístrojov (v_{\max} , a_{\max})

$$u_{Bv} = \frac{v_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3}} \text{ m}, \quad u_{Ba} = \frac{a_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3}} \text{ m}.$$

Získané hodnoty štandardnej neistoty typu A a typu B dosadíme do vzťahov pre kombinované štandardné neistoty

$$u_{C\bar{v}} = \sqrt{u_{A\bar{v}}^2 + u_{Bv}^2}, \quad (1)$$

$$u_{C\bar{a}} = \sqrt{u_{A\bar{a}}^2 + u_{Ba}^2}. \quad (2)$$

Kombinovaná štandardná neistota pre polomer je daná vzťahom (2.9)

$$u_{C\bar{r}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{a}}\right)^2 u_{C\bar{a}}^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{v}}\right)^2 u_{C\bar{v}}^2},$$

$$\text{kde } \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{a}} = \frac{\bar{a}}{3\bar{v}} \text{ a } \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{v}} = -\frac{\bar{a}^2}{6\bar{v}^2} + \frac{1}{2}$$

sú derivácie polomeru r podľa vzdialenosti hrotov a a výšky v . Výrazy $u_{C\bar{a}}$ a $u_{C\bar{v}}$ predstavujú kombinované štandardné neistoty dané vzťahmi (1) a (2).

Relatívna štandardná neistota pre polomer guľovej plochy r bude $u_{r\bar{r}} = \frac{u_{C\bar{r}}}{\bar{r}} 100\%$.



Preskúšajte sa – 2.3

V úlohách 1 – 4 vyberte správne tvrdenie.

1. Relatívna štandardná neistota je v prípade opakovaného priameho merania daná vzťahom

a) $u_{rx} = \frac{u_{Cx}}{\bar{x}} 100\%$, b) $u_{rx} = \sqrt{u_{A\bar{x}}^2 + u_{Bx}^2}$, c) $u_{rx} = \frac{u_{Cx}}{x} 100\%$.

[Odpoveď](#)

2. Absolútna štandardná neistota je v prípade jednorazového priameho merania daná vzťahom

a) $u_{Cx} = u_{Bx}$, b) $u_{Cx} = \sqrt{u_{A\bar{x}}^2 + u_{Bx}^2}$, c) $u_x = \frac{u_{Cx}}{x} 100\%$.

3. Výraz $u_{rx} = \frac{u_{Cx}}{\bar{x}} 100\%$, kde $\bar{x} = f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k)$, je relatívna štandardná neistota

- a) jednorazového priameho merania,
b) jednorazového nepriameho merania,
c) opakovaného nepriameho merania.

[Odpoveď](#)

4. Absolútna štandardná neistota

- a) je daná jedným vzťahom pre rôzne metódy merania,
b) v prípade opakovaného priameho merania ju predstavuje kombinovaná štandardná neistota,
c) je daná vzťahom $u_{rx} = \frac{u_{Cx}}{\bar{x}} 100\%$.

5. Vypočítajte absolútnu a relatívnu štandardnú neistotu nasledujúcich meraní:

- a) priemer kovového valčeka $d = 24,86$ mm bol odmeraný pomocou meradla, ktorého presnosť je určená najmenším dielikom,
b) odpor kovového vodiča bol meraný nepriamo pomocou Wheatstonovho mostíka, jeho hodnota bola určená podľa funkčného predpisu $R = \frac{b}{a} R_n$, kde $a = 46,2$ cm, $b = 53,8$ cm boli odmerané pomocou pásmového meradla a $R_n = 100 \Omega$,
c) výška valčeka bola odmeraná 5-krát, súbor odmeraných hodnôt výšky je:

$h_1 = 65,85 \text{ mm}$, $h_2 = 65,92 \text{ mm}$, $h_3 = 66,00 \text{ mm}$, $h_4 = 65,95 \text{ mm}$, $h_5 = 65,85 \text{ mm}$,
presnosť meracieho prístroja je $h_{\max} = 0,05 \text{ mm}$.

d) kapacita doskového kondenzátora bola určená nepriamo pomocou vzťahu $C = \frac{1}{Rb}$,

kde $b = 19,58 \text{ F}^{-1}\Omega^{-1}$, $R = 50 \text{ k}\Omega$, $R_{\max} = 2500 \Omega$, $u_b = 0,00021 \text{ F}^{-1}\Omega^{-1}$,

e) momentu zotrvačnosti z [príkladu 7](#),

f) rýchlosť zvuku vo vzduchu bola odmeraná 10-krát a určená podľa vzťahu $\bar{v} = \frac{\bar{r}}{\bar{t}}$,

kde $\bar{r} = 0,43 \text{ m}$, $\bar{t} = 0,00135 \text{ s}$, $u_{A\bar{r}} = 0,03 \text{ m}$, $u_{A\bar{t}} = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Presnosť meracích prístrojov bola $r_{\max} = 0,001 \text{ m}$, $t_{\max} = 0,00001 \text{ s}$. [Výsledky](#)

6. Zistite, ktorá veličina (l dĺžka závesu kyvadla alebo T doba kmitu) prispieva najviac do absolútnej štandardnej neistoty tiažového zrýchlenia v [príklade 6](#).
 7. Zistite, ktorá veličina prispieva najviac do absolútnej štandardnej neistoty objemu valčeka s podstavou priemeru $15,69 \text{ mm}$ a výškou $53,2 \text{ mm}$. Výška valčeka bola meraná posuvným meradlom, ktorého nónius je delený na $1/10 \text{ mm}$ a priemer pomocou mikrometra s presnosťou $0,01 \text{ mm}$.
 8. Určte, aký je príspevok jednotlivých štandardných neistôt do kombinovanej štandardnej neistoty z úlohy 5 c) a zhodnoťte presnosť merania. [Výsledky](#)
-

2.4 Zásady pre zápis a zaokrúhľovanie nameraných veličín, neistôt a chýb

Odmerať meranú veličinu a spracovať odmerané hodnoty sme sa už naučili. Dôležité je ešte vedieť ako správne zapísať výsledok merania, vrátane chýb a neistôt. Ako sa zaokrúhľujú chyby a neistoty?



Pri spracovaní výsledkov merania je dôležitý nielen správny výpočet neistôt a chýb, ale aj správny zápis výsledku, ktorý má mať fyzikálny význam. Záver každého merania obsahuje zápis výsledku merania, pod ktorým rozumieme zápis hodnoty meranej veličiny s príslušnou neistotou merania. Hodnota meranej veličiny a aj neistoty musí byť zaokrúhlená a správne zapísaná podľa pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie meranej veličiny a príslušných neistôt a chýb.

2.4.1 Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie hodnoty chyby a neistoty

1. V chybe a neistote má význam len prvá nenulová číslica (platná číslica), maximálne je možné určovať chyby a neistoty na 2 prvé (platné) číslice vo výpočte.

Napríklad:

*13025 mm - prvá platná číslica je 1; 13025 mm, prvé dve platné číslice sú 13; 13025 mm
0,01154 A - prvá platná číslica je 1; 0,01154 A, prvé dve platné číslice sú 11; 0,01154 A*

2. Vypočítanú hodnotu chyby a neistoty zaokrúhľujeme vždy nahor, okrem prípadu, ak je za platnou číslicou 0.

Napríklad:

*13025 mm - prvá platná číslica je 1, za ňou je 3, zaokrúhlime nahor; 20000 mm
13025 mm - prvé dve platné číslice sú 13, za 3 je 0, zaokrúhlime nadol; 13000 mm
0,01154 A - prvá platná číslica je 1, za ňou je 1, zaokrúhlime nahor; 0,02 A
0,01154 A - prvé dve platné číslice sú 11, za 1 je 5, zaokrúhlime nahor; 0,012 A*

Príklad 10: Pomocou pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie zapíšte nasledovné štandardné neistoty $u_V = 1253,045 \text{ mm}^3$, $u_t = 0,3012 \text{ s}$, $u_I = 0,000589 \text{ A}$, $u_l = 0,10005 \text{ m}$:

a) na prvú platnú číslicu, b) na dve platné číslice.

a) Zaokrúhlenie na prvú platnú číslicu:

Pre $u_V = 1253,045 \text{ mm}^3$ prvá platná číslica (nenulová) je **1**, za ňou je 2, preto zaokrúhlime hodnotu neistoty nahor, $u_V = 2000 \text{ mm}^3$.

Pre $u_t = 0,3012 \text{ s}$ prvá platná číslica (nenulová) je **3**, za ňou je 0, zaokrúhlime nadol $u_t = 0,3 \text{ s}$.

Pre $u_I = 0,000589 \text{ A}$ prvá platná číslica (nenulová) je **5**, za ňou je 8, preto zaokrúhlime hodnotu neistoty nahor, $u_I = 0,0006 \text{ A}$.

Pre $u_l = 0,10005 \text{ m}$ prvá platná číslica (nenulová) je **1**, za ňou je 0, potom zaokrúhlime nadol $u_l = 0,1 \text{ m}$.

b) Na dve platné číslice:

Pre $u_V = 1253,045 \text{ mm}^3$ druhá platná číslica je **2**, za ňou je 5, hodnotu neistoty zaokrúhlime nahor $u_V = 1300 \text{ mm}^3$.

Pre ostatné neistoty platí rovnaký postup, potom $u_t = 0,31 \text{ s}$, $u_I = 0,00059 \text{ A}$, $u_l = 0,10 \text{ m}$.

2.4.2 Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie hodnoty nameranej veličiny

1. Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľujeme na tolko desatinných miest ako je určená chyba, resp. neistota. Najprv zaokrúhlime chybu (neistotu) a podľa počtu jej platných desatinných miest zaokrúhlime potom nameranú veličinu na rovnaký počet platných desatinných miest.

Napríklad: Ak neistotu zaokrúhlime na tri desatinné miesta $u_t = 0,002 \text{ s}$, potom aj hodnotu meranej veličiny $t = 185,2364 \text{ s}$ zaokrúhlime na tri desatinné miesta $t = 185,236 \text{ s}$.

2. Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľujeme nasledovne: ak číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú chceme zaokrúhľovať, zápisu nameranej veličiny je

a) od 1 po 4 – zaokrúhľujeme nadol,

Napríklad: Ak hodnotu nameranej veličiny $2,14358$ zaokrúhľujeme na dve desatinné miesta, potom číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme (v tomto prípade za druhou číslicou za desatinnou čiarkou) je 3. Preto hodnotu nameranej veličiny zaokrúhlime nadol na $2,14$.

b) od 6 po 9 - zaokrúhľujeme nahor,

Napríklad: Ak hodnotu nameranej veličiny $2,14\underset{6}{5}8$ zaokrúhľujeme na dve desatinné miesta, potom číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme (za druhou číslicou za desatinnou čiarkou) je 6. Preto hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľime nahor na $2,15$.

c) 5 - zaokrúhľujeme nadol, ak je pred ňou **párne číslo**,

Napríklad: Ak hodnotu nameranej veličiny $2,14\underset{5}{5}8$ zaokrúhľujeme na dve desatinné miesta, číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme je 5, pred ňou je párne číslo 4. Preto hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľime nadol na $2,14$.

d) 5 - nahor, ak je pred ňou **nepárne číslo**.

Napríklad: Ak hodnotu nameranej veličiny $2,17\underset{5}{5}8$ zaokrúhľujeme na dve desatinné miesta, číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme je 5, pred ňou je nepárne číslo 7. Preto hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľime nahor na $2,18$.

Príklad 11: Zaokrúhľite správne hodnotu meranej veličiny $x = 2,13675$ cm, ak štandardná neistota a) $u_x = 0,02$ cm, b) $u_x = 0,012$ cm, c) $u_x = 0,4$ cm, d) $u_x = 0,0085$ cm.

Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľime na rovnaký počet desatinných miest ako je určená neistota.

a) Hodnotu nameranej veličiny $x = 2,13675$ cm zaokrúhľujeme na dve desatinné miesta, podľa neistoty $u_x = 0,02$ cm. Potom číslica v nameranej veličine nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme (za druhou číslicou za desatinnou čiarkou) je 6. Pred ňou je 3, preto ju zaokrúhľime nadol $x = 2,14$ cm.

b) Hodnotu nameranej veličiny $x = 2,13675$ cm zaokrúhľujeme na tri desatinné miesta, podľa neistoty $u_x = 0,012$ cm. Potom číslica v nameranej veličine nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme je 7. Pred ňou je 6, preto ju zaokrúhľime nahor $x = 2,137$ cm.

c) Hodnotu nameranej veličiny $x = 2,13675$ cm zaokrúhľujeme na jedno desatinné miesto, podľa neistoty $u_x = 0,4$ cm. Potom hodnota nameranej veličiny bude zaokrúhlená podľa pravidiel nadol $x = 2,1$ cm.

d) Hodnotu nameranej veličiny $x = 2,13675$ cm zaokrúhľujeme na štyri desatinné miesta, podľa neistoty $u_x = 0,0085$ cm. Potom hodnota nameranej veličiny bude zaokrúhlená podľa pravidiel nahor $x = 2,1368$ cm.

2.4.3 Zápis výsledku

Pri zápise výsledku merania sa číselné hodnoty veličiny a absolútnej štandardnej neistoty (rozšírenej neistoty) dávajú do okrúhlych zátvoriek a rovnaká značka ich jednotiek sa umiestňuje za zátvorkou:

úplný údaj výsledku merania = (hodnota meranej veličiny \pm neistota merania) jednotky.

Napríklad: $d = (0,00592 \pm 0,00003) \text{ m}$, $I = (1014 \pm 3) \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$



Hodnoty nameranej veličiny a príslušnej neistoty najprv premeníme na rovnaké jednotky a potom ich zaokrúhlime a správne zapíšeme.

Najčastejšie chyby pri zápise výsledku:

1. nie je rovnaký počet desatinných miest nameranej veličiny a neistoty,

Napríklad: chybný zápis výsledku $m = (40,5 \pm 0,003) \text{ kg}$

2. nie je rovnaký rád desiatkov nameranej veličiny a neistoty,

Napríklad: chybný zápis výsledku $l = (5,1 \cdot 10^{-2} \pm 2,3 \cdot 10^{-3}) \text{ m}$

3. je rovnaký rád desiatkov, ale nie je rovnaký počet desatinných miest nameranej veličiny a neistoty,

Napríklad: chybný zápis výsledku $I = (6,12 \cdot 10^{-2} \pm 0,2 \cdot 10^{-2}) \text{ A}$

4. nie sú zaokrúhlené hodnoty meranej veličiny a neistoty.

Napríklad: chybný zápis výsledku $t = (2,3585 \pm 0,02408905) \text{ s}$

Hodnoty relatívnej štandardnej neistoty, absolútnej a relatívnej chyby sa zapisujú samostatne bez číselnej hodnoty meranej veličiny, zaokrúhlené podľa pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie.

Napríklad: zaokrúhlené na prvú platnú číslicu $\Delta a = 0,003 \text{ m/s}^2$, $\delta_a\% = 0,6 \%$, $u_{ra} = 0,07 \%$

Príklad 12: Zapište správne výsledky z príkladov 5 a 6 podľa pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie.

V [príklade 5](#) vyšli tieto výsledky: absolútna štandardná neistota merania teploty vody v kalorimetri bola $u_t = 0,0577 \text{ °C}$, relatívna štandardná neistota $u_{rt} = 0,088 \%$ a teplota vody $t = 65,3 \text{ °C}$. Najprv sa zaokrúhli hodnota absolútnej štandardnej neistoty na prvú platnú číslicu $u_t = 0,06 \text{ °C}$ a na rovnaký počet desatinných miest ako je v neistote sa zaokrúhli hodnota teploty $65,30 \text{ °C}$ (teraz sa dopíše 0, aby zápis bol na dve desatinné miesta rovnako ako neistota). Prvá platná číslica v relatívnej štandardnej neistote je 8, potom zaokrúhlená na prvú platnú číslicu je $u_{rt} = 0,09 \%$.

Správny zápis výsledkov merania zaokrúhlených na prvú platnú číslicu je $t = (65,30 \pm 0,06) \text{ °C}$, $u_{rt} = 0,09 \%$.

V [príklade 6](#) vyšli tieto výsledky: tiažové zrýchlenie pre piaty riadok $g = 10,15939 \text{ m/s}^2$, absolútna štandardná neistota pre piaty riadok $u_g = 5,07 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$ a relatívna štandardná neistota $u_{rg} = 0,049 \%$. Hodnota absolútnej štandardnej neistoty zaokrúhlená na prvú platnú číslicu: $u_g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 0,005 \text{ m/s}^2$, hodnota tiažového zrýchlenia zaokrúhlená na 3 desatinné miesta podľa neistoty $g = 10,159 \text{ m/s}^2$ (tretia číslica za desatinnou čiarkou je 9, za ňou je 3, preto sa hodnota tiažového zrýchlenia zaokrúhli nadol). Relatívna štandardná neistota zaokrúhlená na prvú platnú číslicu $u_{rg} = 0,05 \%$.

Správny zápis výsledku je $g = (10,159 \pm 0,005) \text{ m/s}^2$, $u_{rg} = 0,05 \%$.



Preskúšajte sa – 2.4

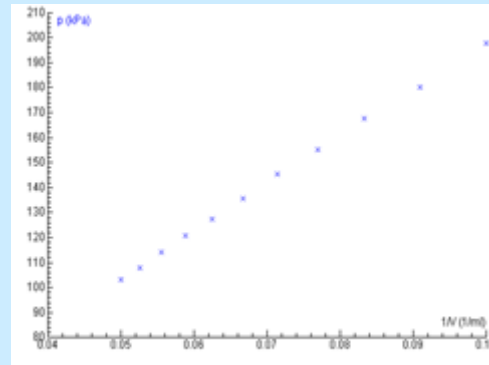
1. Zaokrúhlite nasledujúce neistoty na prvú platnú číslicu:
 $u_x = 0,00523$ cm, $u_m = 53,4258$ g, $u_t = 103,25$ s, $u_I = 0,02031$ A. [Výsledky](#)
2. Zaokrúhlite nasledujúce hodnoty odmeraných veličín, ak príslušné neistoty sú zaokrúhlené na
 - a) jedno desatinné miesto: $l = 1843,5215$ mm, $t = 25,453$ °C, $I = 0,4058$ A,
 - b) tri desatinné miesta: $l = 1843,5215$ mm, $I = 5,3$ mA, $I = 0,4058$ A, $x = 0,005448$ m.
3. Odmeraná hodnota tiažového zrýchlenia je $g = 9,809543$ m/s² a príslušná absolútna štandardná neistota $8,053$ cm/s². Relatívna štandardná neistota je $0,8209$ %. Zapište správne výsledky merania so zaokrúhlením na prvú platnú číslicu.
4. Hodnota prúdu určená meraním je $I = 4,587$ mA, príslušná absolútna štandardná neistota $0,0004253$ A a relatívna štandardná neistota je $9,271\%$. Zapište správne výsledky merania so zaokrúhlením na prvú platnú číslicu. [Výsledky](#)
5. Odmeraná hodnota rýchlosti zvuku vo vzduchu je $v = 384,5475$ m/s. Zapište správne výsledok merania s neistotou so zaokrúhlením na prvé dve číslice, ak absolútna štandardná neistota rýchlosti zvuku je $0,02084$ m/s.
6. Zapište správne výsledok merania s neistotou so zaokrúhlením na prvé dve číslice v zápise, ak odmeraná hodnota hmotnosti štvorcovej dosky je $m = 301,4585$ g a príslušná absolútna štandardná neistota je $0,0154$ g. [Výsledky](#)
7. Zapište správne výsledok merania z [príkladu 2](#) a [príkladu 8](#) na prvú platnú číslicu.
8. Vyberte správne tvrdenie. V chybe má význam
 - a) akákoľvek číslica,
 - b) len prvá nenulová číslica,
 - c) tretia číslica.[Odpoveď](#)
9. Vyberte správne tvrdenie. Hodnotu chyby zaokrúhľujeme
 - a) nahor, ak za platnou číslicou sú čísla od 5 – 9,
 - b) vždy nahor,
 - c) vždy nahor, okrem prípadu, že ja za platnou číslicou 0,
 - d) vždy nadol.

10. Vyberte správne tvrdenie. Prvá platná číslica v neistote $u_f = 0,01058$ Hz je
a) 5, b) 0, c) 1, d) 8.
11. Vyberte správne tvrdenie. Prvá platná číslica v relatívnej chybe $\delta_f = 5,21\%$ je
a) 5, b) 2, c) 1.
12. Vyberte správne tvrdenie. Druhá platná číslica v relatívnej chybe $\delta_f = 5,21\%$ je
a) 5, b) 2, c) 1.
13. Vyberte správne tvrdenie. Hodnotu odmeranej veličiny zaokrúhľujeme
a) na tri desatinné miesta,
b) na toľko desatinných miest ako je v neistote,
c) na toľko desatinných miest ako sa nám to hodí. [Výsledky](#)
14. Doplňte tvrdenia:
a) Prvá platná číslica je prvá číslica.
b) Hodnotu neistoty môžeme určovať maximálne na číslice.
c) Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľujeme nahor, ak číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú chceme zaokrúhľovať, zápisu nameranej veličiny je
d) Ak číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú chceme zaokrúhľovať, zápisu nameranej veličiny je 5 a pred ňou je párne číslo, potom hodnotu nameranej veličiny zaokrúhlime
e) Pri zápise výsledku merania sa do okrúhlych zátvoriek dávajú hodnoty a, pričom sa rovnaká značka ich jednotiek umiestňuje za zátvorkou.
f) Zaokrúhlené hodnoty relatívnej štandardnej neistoty, absolútnej a relatívnej chyby sa zapisujú bez číselnej hodnoty meranej veličiny. [Výsledky](#)
-

3 Spracovanie výsledkov merania

Ako správne viesť krivku cez namerané hodnoty v grafe?

Stačí ich pospájať?



Základné pojmy:

graf, metóda najmenších štvorcov, určenie parametrov lineárnej závislosti pomocou metódy najmenších štvorcov, fitovanie grafu, interpolácia, extrapolácia, program SciDavis

V tejto kapitole uvedieme pravidlá, ako zostrojiť správne graf z nameraných hodnôt. Oboznámime sa s metódou najmenších štvorcov, ktorá umožní viesť cez namerané hodnoty krivku v grafe ako aj určiť hodnotu fyzikálnych konštánt jednotlivých grafických závislostí. Ukážeme ako fitovať graf pomocou výpočtov a pomocou počítačového programu SciDavis.

3.1 Grafické spracovanie

Ak máme odmerané hodnoty potrebujeme ich často spracovať vo forme grafu. Ako máme pri tom postupovať?



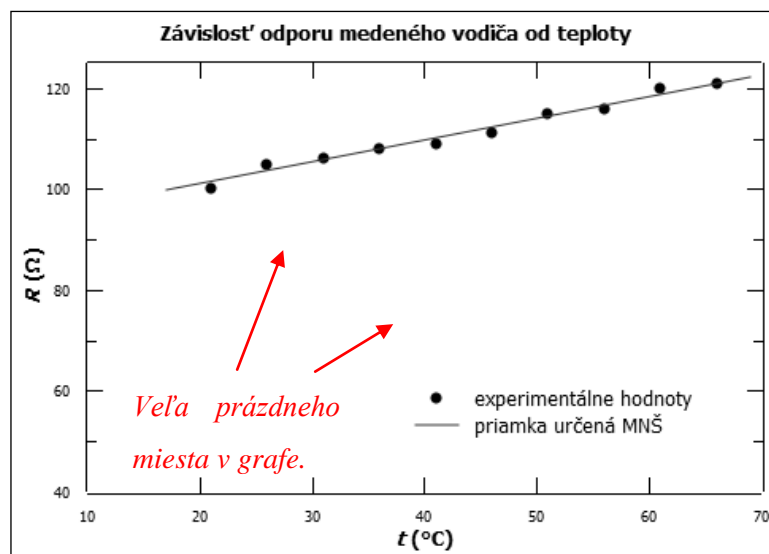
Pri tvorbe grafu k príslušnému laboratórnemu meraniu platia tieto **pravidlá**:

1. Graf vytvoriť na milimetrový papier vo formáte A4 alebo pomocou počítačového programu.
2. Zvoliť vhodnú mierku stupnice a dielikov tak, aby interval zobrazenej premennej na vodorovnej osi zaberol viac ako 2/3 osi, podobne na zvislej osi.



Stupnice na grafe nemusia začínať od nuly.

Napríklad: Na obr. 4 má y-ová os nesprávne zvolený interval hodnôt odporu (40 – 120 Ω), čo sa javí ako veľa prázdneho miesta v grafe. Odmerané hodnoty odporu sú približne od 100 Ω do 120 Ω , preto by bolo vhodnejšie zvoliť interval hodnôt odporu od 95 Ω do 122 Ω . Potom sa odmerané hodnoty rozložia rovnomerne po celej ploche grafu a graf je prehľadnejší (obr. 5).



Obr. 4

- Osi znázorniť plnou čiarou. Vedľa osi vyznačiť fyzikálne veličiny, ktoré sa na ne vynášajú, k nim príslušné jednotky uviesť v okrúhlych zátvorkách napr. F (N), p (Pa). Dieliky podeliť rovnomerne a vyznačiť číselne. Dodržať funkčný predpis $y = f(x)$, nezávislú premennú znázorniť na osi x a závislú premennú na osi y , nezameniť poradie.

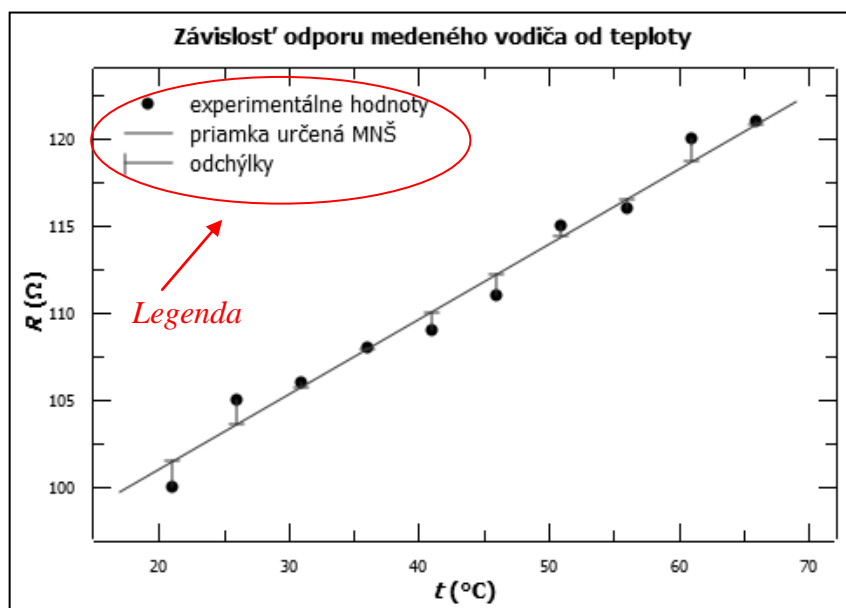
Napríklad: Pre odmeranú závislosť napätia od frekvencie $U = cf + d$, kde c, d sú konštanty, sa hodnota napätia U zobrazí na osi y a hodnota frekvencie f na osi x .

- Neoznačovať na osi hodnoty nameraných veličín, iba vhodným symbolom vyznačiť v grafe (napr. bodka, štvorček, krížik, trojuholník), nevynášať k nim čiary.
- V hornej časti grafu uviesť názov grafu.

Napríklad: Závislosť objemu vzduchu od teploty pri izobarickom deji.

- Cez vynesené body viesť najpravdepodobnejšiu funkčnú závislosť (regresná krivka) určenú pomocou vhodného počítačového programu (tzv. fitovanie) alebo pomocou výpočtov (napr. pomocou metódy najmenších štvorcov), **vynesené body nespájať**.
- Uviesť legendu (popis použitých symbolov) v grafe, namerané hodnoty odlišiť iným symbolom od vypočítaných hodnôt.

Napríklad: Správne zostrojený graf, ktorý splňa vyššie spomenuté pravidlá, je na obr. 5.

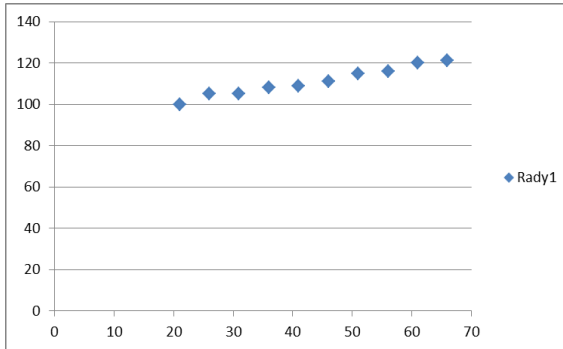


Obr. 5

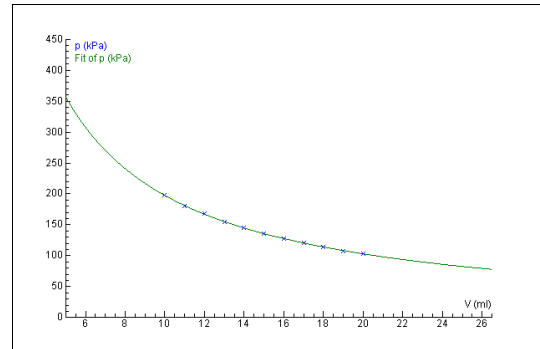


Preskúšajte sa – 3.1

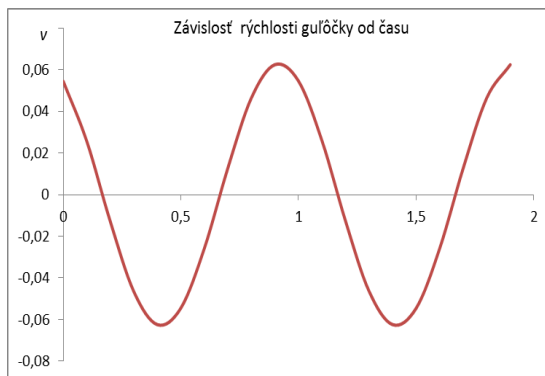
- Zistite, ktoré pravidlá pre tvorbu grafu nie sú splnené v nasledujúcich grafoch:
 - $T^2 = f(l)$, kde T bolo merané v sekundách a l v metroch,
 - $p = f(V)$, kde p bolo merané v kPa a V v ml,
 - $v = f(t)$, kde v bolo merané v m/s a t v sekundách,
 - $R = f(t)$, kde R bolo merané v Ω a t v $^{\circ}\text{C}$.



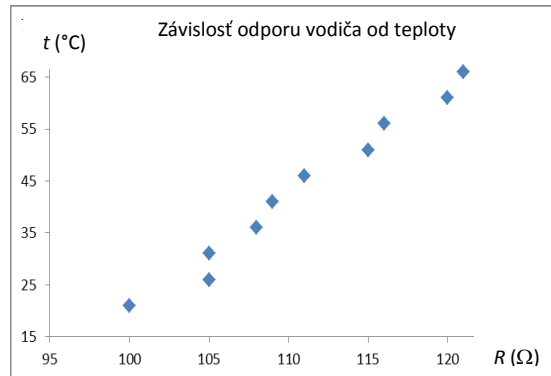
a)



b)



c)



d)

- Vyberte správnu odpoveď. Stupnice na grafe
 - musia vždy začínať od nuly,
 - prispôbime podľa meraného intervalu hodnôt,
 - začínajú od polovičky nameraných hodnôt.
- Vyberte správnu odpoveď. Vynesené hodnoty nameraných veličín v grafe
 - nespájame,
 - spojíme len prvý bod s posledným bodom,
 - spájame všetky body.

[Výsledky](#)

4. Doplňte tvrdenia.

- a) Osi na grafe znázorňujeme čiarou.
 - b) K jednotlivým osiam vyznačíme , ktoré sa na ne vynášajú a k nim uvedieme príslušné jednotky do
 - c) Pri popise osí grafu dodržiavame prepis.
 - d) K odmeraným hodnotám čiary.
 - e) Cez vynesené body vedieme krivku.
 - f) Vypočítané hodnoty odlišíme iným od nameraných a uvedieme ich do [Výsledky](#)
-

3.2 Metóda najmenších štvorcov

Ako zostrojiť najpravdepodobnejšiu funkčnú závislosť, tzv. regresnú krivku?



V niektorých experimentoch môžeme sledovať závislosť jednej veličiny (y) od zmien inej veličiny (x), napr. závislosť elektrického odporu od teploty, závislosť doby kmitu jednoduchého kyvadla od dĺžky závesu a pod. Ak teória pre daný experiment predpovedá určitú závislosť, napr. typu $y = ax + b$, potom je potrebné určiť hodnoty parametrov a , b , ktoré súvisia s ďalšími dôležitými informáciami, ktoré môžeme z experimentálnych hodnôt získať.

Pre tento účel sa často využíva **metóda najmenších štvorcov (MNS)**, ktorá považuje za správne také hodnoty parametrov a , b , c , ..., ktoré dávajú najmenší súčet druhých mocnín odchýliek medzi nameranými (y_{im}) a teoreticky predpovedanými hodnotami (y_i). Na obr. 5 je zobrazená teplotná závislosť odporu medeného vodiča, pre ktorú v danej oblasti teplôt platí $R = R_0 + R_0\alpha t$ (R_0 je odpor pri teplote $0\text{ }^\circ\text{C}$, α je teplotný koeficient odporu). Sú tu znázornené odmerané hodnoty, lineárna závislosť vypočítaná pomocou MNS (regresná priamka), aj odchýlky nameraných hodnôt od vypočítaných pri jednotlivých teplotách.



Metóda najmenších štvorcov umožňuje určiť hodnoty parametrov a , b , c , ... a tým určiť fyzikálne veličiny, ktoré tieto parametre predstavujú a súčasne umožňuje zobraziť grafickú závislosť y_{im} od x_i pomocou regresnej krivky.

Pomocou tejto metódy je možné odvodiť parametre funkcie pre rôzne funkčné závislosti. Všeobecný postup je nasledovný: majme n nameraných odpovedajúcich hodnôt závislej premennej y_{im} pre n hodnôt nezávislej premennej x_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$. Teoretická závislosť y_i od x_i má tvar $y_i = f(x_i)$ a je vyjadrená pomocou parametrov a, b, c, \dots (napr. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$). Podľa metódy najmenších štvorcov má byť súčet druhých mocnín odchýliek $y_{im} - y_i$ najmenší, hľadajú sa také parametre a, b, c, \dots , pre ktoré bude

výraz $F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2$ minimálny. Matematicky ide o určenie lokálneho extrému funkcie –

bodú, v ktorom prvá derivácia funkcie je rovná nule. Preto sa výraz $F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2$ derivuje podľa jednotlivých parametrov a položí sa rovný nule. Takto sa získa sústava rovníc:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2 \right)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2 \right)}{\partial b} = 0, \dots$$

Riešením tejto sústavy je súbor parametrov a, b, c, \dots , ktoré umožnia viesť regresnú krivku nameranými hodnotami a súčasne určiť pomocou nich fyzikálne veličiny.

Čo vyjadrujú parametre a, b, c, \dots ?



Parametre a, b, c, \dots umožňujú určiť hodnoty fyzikálnych veličín. Najčastejšie sa pri ich určovaní postupuje tak, že sa porovná funkčný predpis pre namerané veličiny s príslušným teoreticky predpovedaným matematickým predpisom. Konkrétne sa porovnávajú súčasne pravé a ľavé strany predpisov. Príslušne parametre predstavujú priamo fyzikálnu veličinu alebo vzťah (napr. súčin alebo podiel) fyzikálnej veličiny s inou veličinou.

Napríklad: Pre závislosť časového intervalu t od vzdialeností r pri meraní rýchlosti zvuku vo vzduchu platí, $t = \frac{r}{v}$ (1), hodnota v je konštantná. Porovnaním pravých a ľavých strán vzťahu

(1) s teoreticky predpovedanou závislosťou $y = ax$, dostaneme $a = \frac{1}{v}$ (2). Hodnota parametra

a sa určí metódou najmenších štvorcov a pomocou nej sa vypočíta hodnota rýchlosti $v = \frac{1}{a}$.

V ďalších častiach sa sústredíme na konkrétne vyjadrenie parametrov a, b, c, \dots pre dve funkčné závislosti, ktoré budeme najviac používať pri vyhodnocovaní meraní.

3.2.1 Lineárna závislosť typu $y = ax + b$

Meraním sme dostali funkčnú závislosť y_{im} od x_i , pre n meraní. Teoretická funkcia, ktorá popisuje túto závislosť má tvar $y_i = ax_i + b$. Podľa metódy najmenších štvorcov má byť výraz

$F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_{im} - ax_i - b)^2$ minimálny. Minimum funkcie F sa určí ako prvá

derivácia F podľa oboch parametrov a , b , ktoré položíme rovné nule:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_{im} - ax_i - b)^2 \right)}{\partial a} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_{im} - ax_i - b)^2 \right)}{\partial b} = 0. \quad (3.2)$$

Riešením rovníc (3.1) a (3.2) získame sústavu dvoch rovníc

$$2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_{im} = 0$$

$$2a \sum_{i=1}^n x_i + 2nb - 2 \sum_{i=1}^n y_{im} = 0.$$

$$\text{Označme } s_1 = \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.3) \quad s_2 = \sum_{i=1}^n y_{im} \quad (3.4) \quad s_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (3.5) \quad s_4 = \sum_{i=1}^n x_i y_{im} \quad (3.6).$$

Potom uvedenú sústavu rovníc môžeme prepísať do tvaru

$$2as_3 + 2bs_1 - 2s_4 = 0 \quad (1)$$

$$2as_1 + 2nb - 2s_2 = 0. \quad (2)$$

Úpravou rovnice (2) vyjadríme parameter b

$$b = \frac{s_2 - as_1}{n} \quad (3).$$

Dosadením vzťahu (3) do rovnice (1) a úpravou pre parameter a dostaneme

$$a = \frac{ns_4 - s_1s_2}{ns_3 - s_1^2}. \quad (3.7)$$

Dosadením rovnice (3.7) do vzťahu (3) a úpravou pre **parameter b** dostaneme

$$b = \frac{s_2s_3 - s_1s_4}{ns_3 - s_1^2}. \quad (3.8)$$



V praxi sa pri určovaní parametrov a, b postupuje tak, že pre nameranú závislosť $y_{im} = f(x_i)$ sa vypočítajú sumy (3.3) – (3.6), ktoré sa použijú na výpočet parametrov podľa vzťahov (3.7) a (3.8). Pre vyhodnotenie merania a pre určenie regresnej krivky stačí poznať tieto vzťahy.

Ako pomocou parametrov a, b, c, \dots zostrojíte najpravdepodobnejšiu funkčnú závislosť, ktorej teoretický priebeh je lineárny?



Vypočítané hodnoty parametrov a, b sa dosadia do funkčného predpisu teoretickej závislosti $y_i = f(x_i)$, ktorá popisuje odmeranú závislosť. Zo súboru odmeraných hodnôt x_i sa vyberú dve hodnoty. Najčastejšie sa volia zo začiatku intervalu, napr.: x_1 a z konca intervalu, napr.: x_n . Dosadia sa do funkčného predpisu a pomocou známych hodnôt parametrov a, b sa vypočítajú nové hodnoty y_i . Pre x_1 bude nová vypočítaná hodnota $y_1 = f(x_1)$, pre x_n bude nová hodnota $y_n = f(x_n)$. Takto získané súradnice dvoch bodov $(x_1, y_1), (x_n, y_n)$ sa použijú na zostrojenie regresnej krivky, ktorá cez ne bude prechádzať. Odmerané hodnoty veličín (x_i, y_{im}) sa v grafe označia vhodným symbolom, ale nespájajú sa. Pomedzi ne je vedená regresná krivka. Vzdialenosť bodov odmeraných hodnôt veličín y_{im} od regresnej krivky y_i predstavuje odchýlku od vypočítaných (správnych) hodnôt, t.j. hodnotí presnosť merania. Čím je odchýlka väčšia, tým bola presnosť merania danej veličiny menšia.

Například: *Pre odmeranú funkčnú závislosť y_{im} od x_i , ktorá teoreticky spĺňa funkčný predpis $y_i = ax_i + b$ (1), sa zo súboru odmeraných hodnôt x_i vyberú dve hodnoty napr. x_1 a x_8 . Dosadia sa do funkčného predpisu (1) a pomocou známych hodnôt parametrov a, b sa vypočítajú hodnoty y_i . Pre x_1 bude vypočítaná hodnota $y_1 = ax_1 + b$, pre x_8 hodnota $y_8 = ax_8 + b$.*

Pre **absolútne štandardné neistoty** jednotlivých parametrov platia tieto vzťahy

$$u_a = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\frac{1}{n} s_2\right)^2}{\frac{1}{n} s_3 - \left(\frac{1}{n} s_1\right)^2} - a^2} \quad (3.9)$$

$$u_b = u_a \sqrt{\frac{1}{n} s_3 - \left(\frac{1}{n} s_1\right)^2}. \quad (3.10)$$

Príklad 13: Pomocou metódy najmenších štvorcov

- určte parametre a , b pre závislosť $R = at + b$ použitím odmeraných hodnôt odporu R a teploty t (tab. 4),
- určte absolútne štandardné neistoty jednotlivých parametrov a zapíšte výsledok podľa pravidiel pre zaokrúhľovanie,
- pomocou parametrov a , b zostrojte regresnú krivku v grafe.

t (°C)	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66
R (Ω)	100	105	106	108	109	111	115	116	120	121

Tab. 4

- Pri výpočte parametrov a , b sa použije MNŠ. Odmeraná závislosť je typu $y = ax + b$, kde $R = y$, $t = x$. Pomocou odmeraných hodnôt $x_i = t_i$ a $y_{im} = R_i$ sa najprv určia sumy dané vzťahmi (3.3) – (3.6), kde $n = 10$:

$$s_1 = \sum_{i=1}^{10} t_i = 21 + 26 + \dots + 66 = 435 \text{ °C},$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{10} R_i = 100 + 105 + \dots + 121 = 1111 \text{ Ω},$$

$$s_3 = \sum_{i=1}^{10} t_i^2 = 21^2 + \dots + 66^2 = 20985 \text{ °C}^2,$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{10} t_i R_i = 21 \cdot 100 + 26 \cdot 105 + \dots + 66 \cdot 121 = 49246 \text{ °C} \cdot \Omega.$$

Vypočítané hodnoty súm sa použijú na výpočet parametrov a , b pomocou vzťahov (3.7), (3.8). Potom parametre

$$a = \frac{10.49246 - 435.1111}{10.20985 - 435^2} = 0,44 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot \Omega,$$

$$b = \frac{1111.20985 - 435.49246}{10.20985 - 435^2} = 91,7 \Omega.$$

Hodnoty parametrov určené pomocou metódy najmenších štvorcov sú $a = 0,44 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot \Omega$, $b = 91,7 \Omega$.

b) Pri výpočte absolútnych štandardných neistôt parametrov použijeme vzťahy (3.9) a (3.10), kde

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n R_i^2 = 123849 \Omega^2.$$

Potom po dosadení pre neistotu parametra a

$$u_a = \frac{1}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{\frac{1}{10} 123849 - \left(\frac{1}{10} 1111\right)^2}{\frac{1}{10} 20985 - \left(\frac{1}{10} 435\right)^2}} - 0,44^2 = 0,0292 \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

a neistotu parametra b

$$u_b = 0,0292 \sqrt{\frac{1}{10} 20985 - \left(\frac{1}{10} 435\right)^2} = 0,419 \Omega.$$

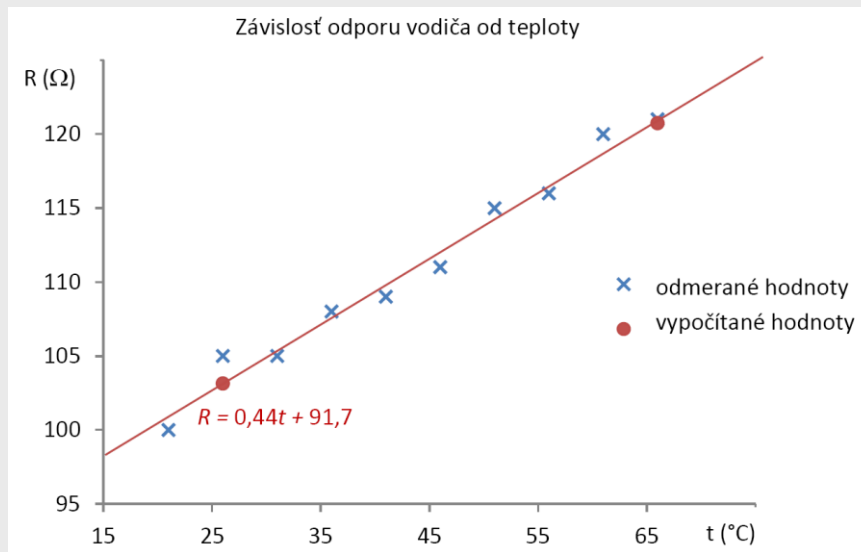
Zápis výsledkov $a = (0,44 \pm 0,03) \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $b = (91,7 \pm 0,5) \Omega$ zaokrúhlené na prvú platnú číslicu.

c) Pri tvorbe regresnej krivky sa do funkčného predpisu odmeranej závislosti $R = at + b$ dosadia vypočítané hodnoty parametrov $a = 0,44 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot \Omega$, $b = 91,7 \Omega$: $R = 0,44t + 91,7$ (1). Zo súboru odmeraných teplôt v tab. 4 sa zvolia dve hodnoty, napr. $t_2 = 26 \text{ } ^\circ\text{C}$ a $t_{10} = 66 \text{ } ^\circ\text{C}$, ktoré sa použijú na výpočet dvoch nových hodnôt odporu.

Dosadením do vzťahu (1):

$$R_2 = 0,44t_2 + 91,7 = 0,44 \cdot 26 + 91,7 = 103,14 \Omega$$

$$R_{10} = 0,44t_{10} + 91,7 = 0,44 \cdot 66 + 91,7 = 120,74 \Omega.$$



Obr. 6

Do grafu sa najprv znázornia namerané hodnoty z tabuľky. Potom sa vynesú pre zvolené hodnoty teplôt vypočítané hodnoty odporov ($R_2 = 103,14 \Omega$, $R_{10} = 120,74 \Omega$), ktoré sa označia iným symbolom. Cez ne sa potom vedie regresná krivka, ktorej funkčný predpis je $R = 0,44t + 91,7$.

Zostrojený graf s regresnou krivkou $R = 0,44t + 91,7$ je na obr. 6.

3.2.2 Lineárna závislosť typu $y = ax$

Pri určovaní parametra a sa postupuje analogicky ako to bolo uvedené v časti [3.2.1](#). Teoretická funkcia, ktorá popisuje odmeranú závislosť y_{im} od x_i má tvar $y_i = ax_i$. Podľa metódy najmenších štvorcov má byť výraz $F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_{im} - ax_i)^2$ minimálny. Minimum pre funkciu F sa určí pomocou prvej derivácie F podľa parametra a , ktorú položíme rovnú nule:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n (y_{im} - ax_i)^2 \right)}{\partial a} = 0. \quad (3.11)$$

Riešením výrazu (3.11) je rovnica

$$2a \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_{im} = 0.$$

Ak použijeme označenie (3.5) a (3.6), rovnica sa zjednoduší na výraz

$$2as_3 - 2s_4 = 0.$$

Jej riešením je **parameter a**:

$$a = \frac{s_4}{s_3}. \quad (3.12)$$



Niektoré kalkulačky majú zabudovanú funkciu na určenie parametrov a , b , c , pomocou metódy najmenších štvorcov. Rovnako aj počítačové programy na tvorbu grafov využívajú metódu najmenších štvorcov.

Absolútna štandardná neistota parametra a je daná

$$u_a = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{s_3} - a^2}. \quad (3.13)$$

Príklad 14: Auto vykonáva rovnomerný priamočiary pohyb. Vypočítajte hodnotu jeho rýchlosti, ak jeho počiatočná dráha bola 0 m. Odmerané hodnoty sú uvedené v tab. 5. Pri výpočte použite metódu najmenších štvorcov. Určte absolútnu štandardnú neistotu rýchlosti a zapíšte výsledok merania.

Pri výpočte použijeme MNŠ na určenie parametra a , pomocou ktorého určíme hodnotu rýchlosti auta v . Z funkčného predpisu pre rovnomerný priamočiary pohyb $s = vt$ (1), vyplýva, že je to lineárna závislosť typu $y = ax$ (2). Potom porovnaním pravých a ľavých strán vzťahu (1) zo vzťahom (2) zistíme, že

$$v = a \quad (3).$$

Na výpočet parametra a použijeme vzťah (3.12), kde do súm (3.5) a (3.6) dosadíme za $x_i = t_i$, $y_{im} = s_i$, $n = 17$. Potom

$$a = \frac{s_4}{s_3} = \frac{\sum_{i=1}^{17} s_i t_i}{\sum_{i=1}^{17} t_i^2}. \quad (4)$$

<i>n</i>	<i>t</i> (s)	<i>s</i> (m)
1.	0	0
2.	0,12	0,87
3.	0,24	1,42
4.	0,36	2,24
5.	0,48	2,9
6.	0,6	3,67
7.	0,72	4,65
8.	0,84	5,31
9.	0,96	6,23
10.	1,08	7,01
11.	1,2	7,82
12.	1,32	8,54
13.	1,44	9,64
14.	1,56	10,46
15.	1,68	11,33
16.	1,8	12,15
17.	1,92	13,03

Tab. 5

Dosadením odmeraných hodnôt z tab. 5 do vzťahu (4) pre parameter *a*

$$a = \frac{142,9836}{21,5424} = 6,637 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zo vzťahu (3) vyplýva, že rýchlosť auta je daná parametrom *a*, jej hodnota je 6,637 m/s.

Pri výpočte absolútnej štandardnej neistoty rýchlosti použijeme vzťah (3.13), ktorý určuje neistotu parametra *a*, kde

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 = 949,6389 \text{ m}^2$$

potom

$$u_a = u_v = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{\frac{949,6389}{21,5424} - 6,637^2} = 0,0437 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zápis výsledku zaokrúhlený na prvú platnú číslicu $v = (949,64 \pm 0,05) \text{ m/s}$.

3.2.3 Voľba funkcie na fitovanie

Pri fitovaní je dôležité zvoliť správnu funkciu na fitovanie. Pre funkčný predpis teoretickej závislosti, ktorá platí pre súbor nameraných hodnôt hľadáme podobný matematický predpis, ktorý nám umožní viesť regresnú krivku.

Napríklad: *Odmeraná závislosť polomeru difrakčných krúžkov od vlnovej dĺžky elektrónov je*

$r = \frac{nD}{d} \lambda$ (1), kde D , d , n sú konštanty. Potom zlomok pred vlnovou dĺžkou λ nahradíme

jednou konštantou $a = \frac{nD}{d}$ a vzťah (1) prepíšeme na tvar $r = a\lambda$. Závislosť polomerov

krúžkov od vlnovej dĺžky je lineárna bez absolútneho člena. Môžeme ju matematicky popísať funkciou $y = ax$, a teda aj touto funkciou fitovať.

Niekedy je výhodné niektoré odmerané závislosti upraviť na jednoduchší tvar, napr. na lineárnu závislosť, čo zjednoduší samotné fitovanie.

Napríklad: *Závislosť tlaku plynu od meniaceho sa objemu pri izotermickom deji je daná*

vzťahom $p = \frac{nRT}{V}$ (1), kde R , T , n sú konštanty. Teoretický predpis tejto závislosti môžeme

upraviť na tvar $p = \frac{a}{V}$ (2), kde $a = nRT$. Zo vzťahu (2) vyplýva, že ide o nepriamu úmernosť,

kde $x = V$, $y = p$. Lineárnu závislosť dostaneme úpravou vzťahu (2), kde $x = \frac{1}{V}$, $y = p$. Potom

$p = a \frac{1}{V}$, jej matematický zápis je $y = ax$. V grafe vynesieme hodnoty $x = \frac{1}{V}$, $y = p$, čo je už

lineárna závislosť, ktorú môžeme fitovať.

Príklad 15: Vypočítajte hodnotu miestneho tiažového zrýchlenia určeného pomocou jednoduchého kyvadla, ak pre tiažové zrýchlenie platí $g = \frac{4\pi^2}{T^2}l$. Odmerané hodnoty pre 10

meraní sú uvedené v tab. 6. Pri výpočte použite metódu najmenších štvorcov, pre upravenú funkciu $T^2 = f(l)$ na lineárnu závislosť. Určte absolútnu štandardnú neistotu tiažového zrýchlenia.

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>l</i> (m)	1	1,048	1,108	1,17	1,24	1,31	1,36	1,429	1,47	1,546
<i>T</i> ² (s ²)	3,891	4,238	4,305	4,522	4,812	5,089	5,358	5,543	5,704	6,037

Tab. 6

Pri výpočte tiažového zrýchlenia *g* použijeme MNS na určenie parametra *a*, pomocou ktorého určíme jeho hodnotu. Zo vzťahu pre tiažové zrýchlenie odvodíme vzťah pre periódu v tvare

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l = al. \quad (1)$$

Funkčnú závislosť (1) upravíme na tvar $t = al$, kde $t = T^2$, čo je lineárna závislosť typu $y = ax$ (2). Potom porovnaním pravých a ľavých strán vzťahu (1) zo vzťahom (2) zistíme, že

$$\frac{4\pi^2}{g} = a. \quad (3)$$

Hodnotu tiažového zrýchlenia určíme pomocou vzťahu (3), v ktorom parameter *a* vypočítame podľa vzťahu (3.12), kde do súm (3.5) a (3.6) dosadíme za $x_i = l_i$, $y_{im} = T_i^2$. Potom

$$a = \frac{s_4}{s_3} = \frac{\sum_{i=1}^{10} l_i T_i^2}{\sum_{i=1}^{10} l_i^2}. \quad (4)$$

Dosadením odmeraných hodnôt z tab. 6 do vzťahu (4), pre parameter *a*

$$a = \frac{63,952}{16,39} = 3,901 \text{ s}^2/\text{m},$$

úpravou vzťahu (3) a dosadením číselnej hodnoty za parameter *a* pre tiažové zrýchlenie dostaneme

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{3,901} = 10,11 \text{ m/s}^2.$$

Tiažové zrýchlenie bolo určené nepriamo, závisí od parametra *a*. Preto pri určení jeho absolútnej štandardnej neistoty použijeme vzťah (2.15), v tvare

$$u_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)^2 u_{B_a}^2},$$

kde

$$u_{B\alpha} = u_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{s_3} - \alpha^2}.$$

Potom

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^{10} T_i^4 = 249,549297 \text{ s}^4$$

a pre štandardnú neistotu parametra α

$$u_{B\alpha} = u_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{249,549297}{16,39} - 3,901^2} = 0,02811 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}.$$

Absolútna štandardná neistota tiažového zrýchlenia je

$$u_g = \frac{\partial g}{\partial \alpha} u_{B\alpha} = \left| -\frac{4\pi^2}{\alpha^2} \right| u_{\alpha} = \left| -\frac{4\pi^2}{3,901^2} \right| 0,02811 = 0,07285 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tiažové zrýchlenie je $g = (10,11 \pm 0,08) \text{ m/s}^2$.

V prípade, že odmeriame funkčné závislosti, v ktorých hodnota závislej premennej y_{im} závisí od hodnoty nezávislej premennej x_i podľa inej, nie lineárnej funkcie (napr. podľa exponenciálnej funkcie) a nie je možné ju upraviť na jednoduchší tvar, na fitovanie použijeme počítačový program. Samozrejme je možné použiť aj metódu najmenších štvorcov, my ju v rámci našich meraní pre spomínané funkcie nebudeme používať. V prípade nelineárnych závislosti použijeme programy SciDavis a Coach, ktoré na fitovanie ponúkajú základný súbor funkcií, z ktorých sa dá zvoliť fitovacia funkcia, prípadne vytvoriť nová (viac v časti 3.4 a v kapitole 4).

Napríklad: *Odmeraná závislosť dráhy vozíčka od času je daná funkčnou závislosťou*

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, *potom na fitovanie vyberieme funkciu v tvare polynómu $y = c + bx + ax^2$ v príslušnom počítačovom programe.*



Preskúšajte sa – 3.2

1. Určte hodnotu odporu R_0 pri teplote $0\text{ }^\circ\text{C}$ a teplotného koeficientu α pomocou MNŠ, ak viete, že teplotná závislosť odporu medeného vodiča je daná predpisom $R = R_0 + R_0\alpha t$. Pri výpočte použite výsledky z [príkladu 13](#).
2. Bola 5–krát odmeraná závislosť hydrostatického tlaku p v kvapaline od rozdielnej výšky hladiny kvapaliny v manometri h . Pomocou MNŠ určte hodnotu atmosférického tlaku p_a a hustoty kvapaliny ρ v manometri, ak teoretická závislosť popisujúca hydrostatický tlak je $p = p_a + \rho gh$. Súbor odmeraných hodnôt je daný v tab. 7. Zostrojte graf. [Výsledky](#)

h (mm)	64	80	65	70	83
p (kPa)	99,203	99,360	99,213	99,262	99,389

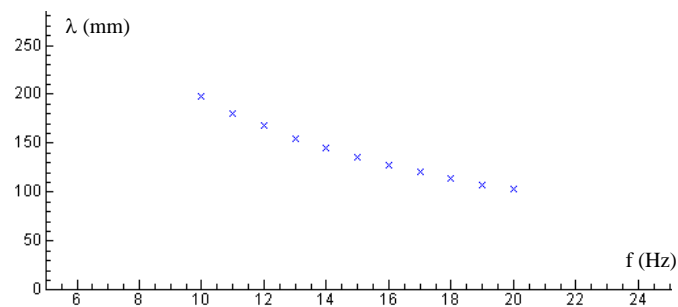
Tab. 7

3. Úpravou nameranej funkčnej závislosti $P = \sigma S \alpha T^4$ na lineárnu závislosť určte hodnotu Stefanovej – Boltzmanovej konštanty σ pomocou metódy MNŠ. Odmerané hodnoty teploty vlákna žiarovky T a žiarivého výkonu prúdu tečúceho žiarovkou P sú v tab. 8. Plocha vlákna žiarovky, ktorou vyžaruje, je $S = 4,712 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ a $\alpha = 0,43$ je pohltivosť materiálu vlákna. Zostrojte graf. Určte absolútnu štandardnú neistotu Stefanovej – Boltzmanovej konštanty a zapíšte správne výsledok.

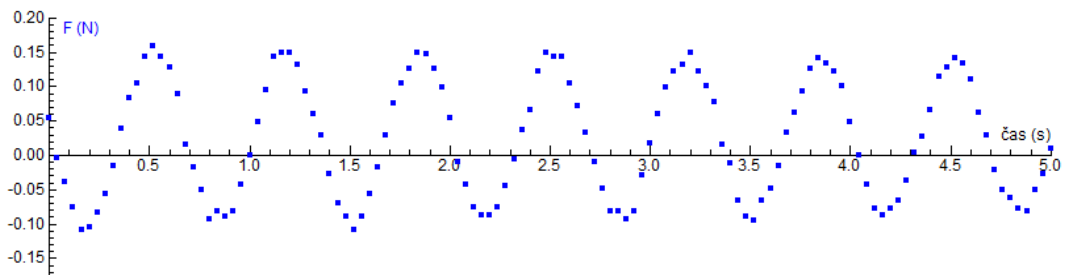
T^4 (K^4). 10^{12}	3,55	4,58	5,97	7,47	8,61	10,34	12,05	14,26	15,78	18,47
P (W)	6,6	8,4	10,32	12,33	14,4	16,61	18,94	21,32	23,8	26,55

Tab. 8

4. Zostrojte graf z nameraných hodnôt z [príkladu 14](#) pomocou MNŠ. [Výsledky](#)
5. Zostrojte graf z nameraných hodnôt z [príkladu 15](#) pre funkčný predpis $T^2 = kl$ pomocou MNŠ.
6. Vyberte správny typ funkcie na fitovanie pre odmerané závislosti
 - a) ak $\lambda = \frac{v}{f}$ (obr. 7),
 - b) ak $F = F_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (obr. 8).



Obr. 7



Obr. 8

7. Navrhnite vhodné funkcie na fitovanie nasledujúcich funkčných závislostí:
- $v = at$, kde a je parameter,
 - $Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, kde Q_0 , R , C sú parametre,
 - $\varepsilon = L + Kt$, kde K , L sú parametre.
8. Upravte nasledujúce závislosti tak, aby sa mohli fitovať ako lineárna funkcia:
- $A = A_0 e^{-bt}$, kde A_0 , b sú parametre,
 - $pV = NkT$, kde N , k , V sú parametre,
 - $\omega^2 = \frac{k}{m}$, kde k je parameter.
- [Výsledky](#)
9. Vyberte správne tvrdenie. Metóda najmenších štvorcov považuje za správne také hodnoty parametrov a , b , c , ...,
- ktoré dávajú najväčší súčet druhých mocnín odchýliek medzi nameranými a teoreticky predpovedanými hodnotami,
 - ktoré dávajú najmenší súčet druhých mocnín odchýliek medzi nameranými a teoreticky predpovedanými hodnotami,
 - ktoré dávajú najmenší súčin druhých mocnín odchýliek medzi nameranými a

teoreticky predpovedanými hodnotami.

10. Vyberte správne tvrdenia. Pomocou metódy najmenších štvorcov

- a) je možné určiť chyby odmeraných fyzikálnych veličín,
- b) je možné určiť hodnotu parametrov a, b, c, \dots ,
- c) je možné viesť regresnú krivku.

[Výsledky](#)

11. Pre lineárnu závislosť typu $y = ax + b$ pri použití MNŠ volíme

- a) $s_1 = \sum_{i=1}^n x_i$
- b) $s_1 = \sum_{i=1}^n y_i$
- c) $s_1 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$
- d) $s_1 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

12. Pomocou metódy najmenších štvorcov pre lineárnu závislosť typu $y = ax$ je vypočítaný parameter a

- a) $a = \frac{s_3}{s_4}$
- b) $a = \frac{s_1}{s_4}$
- c) $a = \frac{s_4}{s_3}$
- d) $a = \frac{s_2}{s_3}$.

13. Doplňte tvrdenia:

- a) Pri metóde najmenších štvorcov sa hľadajú také parametre a, b, c, \dots , pre ktoré bude výraz $F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2$
- b) Matematicky sa pri metóde najmenších štvorcov určuje lokálny extrém funkcie pre výraz $F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2$ podľa jednotlivých a dá sa rovný
- c) Pri určovaní hodnôt fyzikálnych veličín pomocou parametrov a, b, c, \dots sa postupuje tak, že sa funkčný predpis pre namerané veličiny s príslušnou teoretickou predpovedanou matematickou funkciou.
- d) Pri zostrojení regresnej krivky sa vypočítané hodnoty parametrov a, b, c do funkčného predpisu teoretickej závislosti $y_i = f(x_i)$ a zo súboru odmeraných hodnôt x_i sa vyberú hodnoty. Dosadia sa do funkčného predpisu a pre dané hodnoty parametrov a, b, c sa nové hodnoty y_i . Cez získané súradnice dvoch bodov $(x_i, y_i), (x_n, y_n)$ je regresná krivka.

[Výsledky](#)

3.3 Interpolácia a extrapolácia

Ako určiť hodnotu meranej veličiny v bode, ktorý nebol odmeraný, pomocou odmeraných hodnôt?



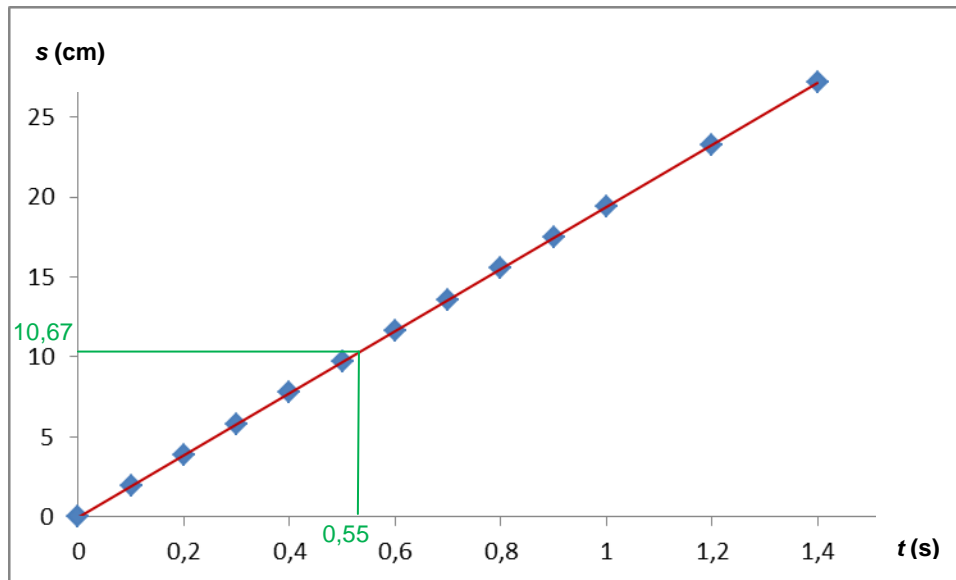
Interpolácia a extrapolácia sú numerické metódy, ktoré umožňujú určiť hodnotu meranej veličiny y v bode x , ktorý je mimo interval nameraných hodnôt x_i z odmeranej funkčnej závislosti $y_{im} = f(x_i)$.

3.3.1 Interpolácia

Pri meraní určujeme konečný súbor n hodnôt nezávislej premennej x_i a im prislúchajúci súbor n závislých premenných y_{im} , pričom platí $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Často nás zaujíma hodnota závislej veličiny y nezávislej premennej x , ktorá sa nezhoduje zo žiadnou z nameraných hodnôt x_i a leží v intervale $x_1 < x < x_n$. Hodnota veličiny y pre dané x sa určí **interpoláciou**. Najprv odmeranými bodmi x_1, x_2, \dots, x_n vedieme krivku, aby sme nahradili konečnú postupnosť bodov spojitou funkciou. Ak poznáme teoretickú funkčnú závislosť y_i od x_i , $y_i = f(x_i)$ pre odmeraný súbor hodnôt y_{im} , použijeme metódu najmenších štvorcov na jej zostrojenie. Hodnota y pre dané x sa určí priamo odčítaním z grafu.

Napríklad: Pomocou interpolácie je možné určiť hodnotu dráhy v čase $t = 0,55$ s na závislosti dráhy od času (obr. 9) rovnomerného priamočiareho pohybu vozíčka. Hodnota dráhy v tomto čase nebola určená meraním. Jej hodnota sa určí odčítaním z grafu pre daný časový okamih, v tomto prípade je to $s = 10,67$ cm.

V prípade, že teoretickú závislosť pre odmerané y_i od x_i nepoznáme, nahradíme funkčnú závislosť medzi odmeranými bodmi jednoduchou funkciou (napr. lineárnou alebo kvadratickou). Potom hovoríme o lineárnej alebo kvadratickej interpolácii, pre ktoré platia konkrétne matematické postupy, ktoré nebudeme spomínať. Pre naše potreby si vystačíme s postupom interpolácie pre známu teoretickú funkčnú závislosť.



Obr. 9

3.3.2 Extrapolácia

Ak z meraného priebehu funkcie odhadujeme hodnotu y v bode x , ktorý leží mimo intervalu nameraných hodnôt, hovoríme o **extrapolácii**. Pri extrapolácii sa môžu použiť numerické metódy interpolácie.

V prípade, ak hodnota y nie je veľmi ďaleko od nameranej závislosti a jej teoretický priebeh je lineárny, vedieme priamku cez hodnoty mimo interval nameraných hodnôt, tak aby prechádzala cez príslušný bod x , pre ktoré chceme určiť y . Pri tomto postupe musíme brať do úvahy, že mimo merného intervalu, môžu na nami požadované hodnoty mať vplyv nové fyzikálne javy, ktoré sa v meranom intervale neprejavili. Napr. pri meraní teplotnej závislosti elektrického odporu vodiča od teploty nameriame hodnoty v intervale od 20 do 60°C a extrapolujeme do 100°C, pričom dodatočným meraním zistíme, že vodič sa roztopil pri teplote 80°C. Alebo extrapolujeme závislosť normálového napätia od relatívneho predĺženia materiálu do hodnoty, ktorá ako vyplynie z dodatočného merania, je nad medzou pevnosti materiálu (došlo k jeho pretrhnutiu).

Napríklad: Ak by sme chceli určiť hodnotu dráhy na obr. 9 v časovom okamihu 1,6 s, viedli by sme priamku cez body za poslednou nameranou hodnotu v grafe pri zachovaní smernice (sklonu grafu).



Preskúšajte sa – 3.3

1. Zostrojte graf závislosti hmotnosti valčeka od jeho objemu $m = f(V)$ pre hodnoty z tab. 9.

$V \text{ (mm}^3\text{)}$	$m \text{ (g)}$
5 050	5,7
7 681	9,09
10 286	12,79
13 370	15

Tab. 9

- a) Pomocou interpolácie určte hmotnosť valčeka, ktorého objem je 6000 mm^3 .
b) Pomocou extrapolácie určte hmotnosť valčeka, ktorého objem je 4000 mm^3 .

[Výsledky](#)

2. Doplňte tvrdenia:

- a) Pri interpolácii určujeme hodnotu veličiny y pre dané x , ktoré sa nezhoduje zo žiadnou z nameraných hodnôt x_i a leží v intervale
- b) Ak z meraného priebehu funkcie odhadujeme hodnotu y v bode x , ktorý leží mimo intervalu nameraných hodnôt použijeme metódu
- c) Pri extrapolácii musíme brať do úvahy, že mimo merného intervalu, môžu na nami požadované hodnoty mať nové fyzikálne javy, ktoré sa v meranom intervale neprejavili.
- d) Pri interpolácii známej teoretickej funkčnej závislosti $y_i = f(x_i)$, cez ktorú je vedená regresná krivka pomocou metódy najmenších štvorcov, sa hodnota y pre dané x sa určí z grafu.
- d) Ak pri extrapolácii nie je hodnota y veľmi ďaleko od nameranej závislosti a jej teoretický priebeh je lineárny, vedieme cez hodnoty x_i v interval nameraných hodnôt, tak aby prechádzala cez príslušný bod x , ktoré chceme určiť y .

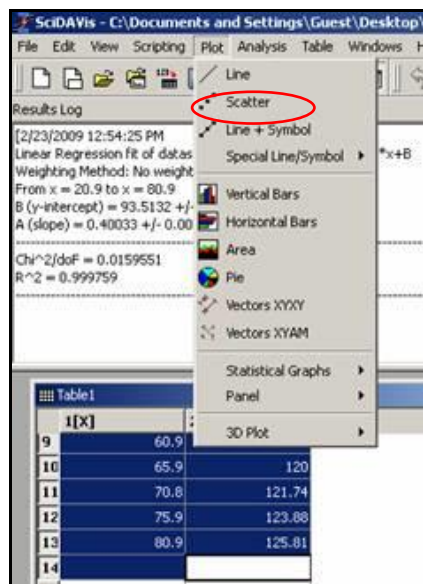
[Odpovede](#)

3.4 Počítačový program SciDavis

Táto časť je venovaná popisu potrebných funkcií a postupov na zobrazenie grafickej závislosti nameraných dát a ich fitovanie pomocou počítačového programu SciDavis. Je to voľne dostupný programový balík (free software), ktorý sa používa na našich meraniach.

Zostrojenie grafu z nameraných hodnôt

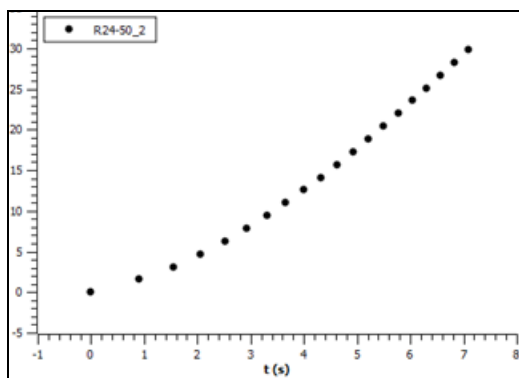
1. Po otvorení programu SciDavis, do tabuľky zapíšeme namerané hodnoty (do prvého stĺpca hodnoty nezávislej premennej x a do druhého stĺpca hodnoty závislej premennej y).
2. Pomocou myši zvýrazníme príslušné stĺpce tabuľky, ktoré chceme zobraziť.
3. Vyberieme z hornej lišty ponuku Plot.
4. V príslušnej ponuke zvolíme možnosť *Scatter* (obr. 10).



Obr. 10



Pomocou tohto postupu program zobrazí graf bez regresnej krivky (obr. 11).

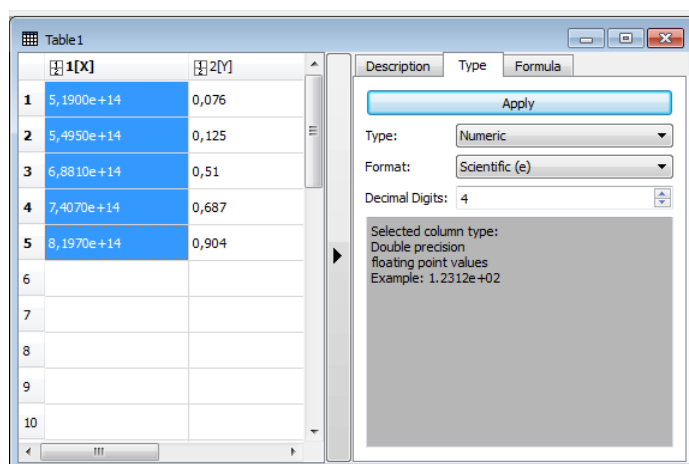


Obr. 11

Zmena formátu čísla v stĺpci

1. Klikneme do stĺpca, v ktorom chceme zmeniť formát čísla (napr. chceme zapísať číslo s desiatkami – $5,19 \cdot 10^{14}$).
2. Vo vedľajšom okne vyberieme v ponuke Type možnosť *Format* a zvolíme *Scientific (e)*, V príslušnom stĺpci budú čísla (napr. $5,19 \cdot 10^{14}$) prepísané do formátu $5,19e+14$ (obr. 12).

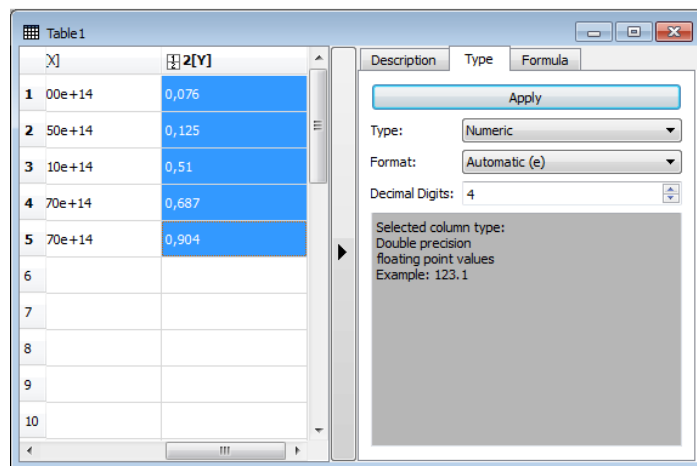
Poznámka: Ak sa vedľa tabuľky nezobrazí okno ako na obr. 12, potom pre zmenu formátu čísla použijeme klávesovú skratku (Ctrl + Alt + O) alebo klikneme pravým tlačidlom myši na danom stĺpci, zvolíme možnosť *Column Options ...*. V otvorenom okne pri možnosti *Format* zvolíme *Scientific:1E3*, v možnosti *Precision:* zvolíme počet desatinných miest za desatinnou čiarkou čísla.



Obr. 12

3. Ak v danom stĺpci má byť číslo zapísané bez desiatkov (napr. 0,076), potom zvolíme možnosť *Format – Automatic(e)*. V príslušnom stĺpci budú zapisované čísla vo formáte 0,076 (obr. 13).

Poznámka: Ak sa vedľa tabuľky nezobrazí okno ako na obr. 13, potom pre zápis čísla bez desiatkov použijeme klávesovú skratku (Ctrl +Alt + O) alebo klikneme pravým tlačidlom myši na danom stĺpci, zvolíme možnosť *Column Options ...*. V okne, ktoré sa otvorí pri možnosti *Format* zvolíme *Default*, v možnosti *Precision*: zvolíme počet desatinných miest za desatinnou čiarkou čísla.

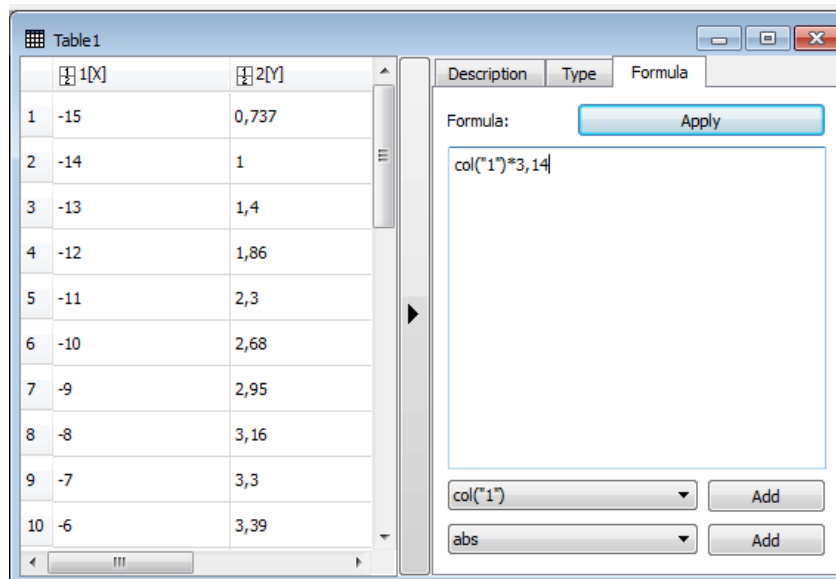


Obr. 13

Násobenie stĺpca číslom (vykonanie matematickej operácie so stĺpcom)

Ak potrebujeme všetky hodnoty niektorého stĺpca vynásobiť rovnakou hodnotou (napr. 3,14) (alebo vykonať inú matematickú operáciu v stĺpci) postupujeme nasledovne:

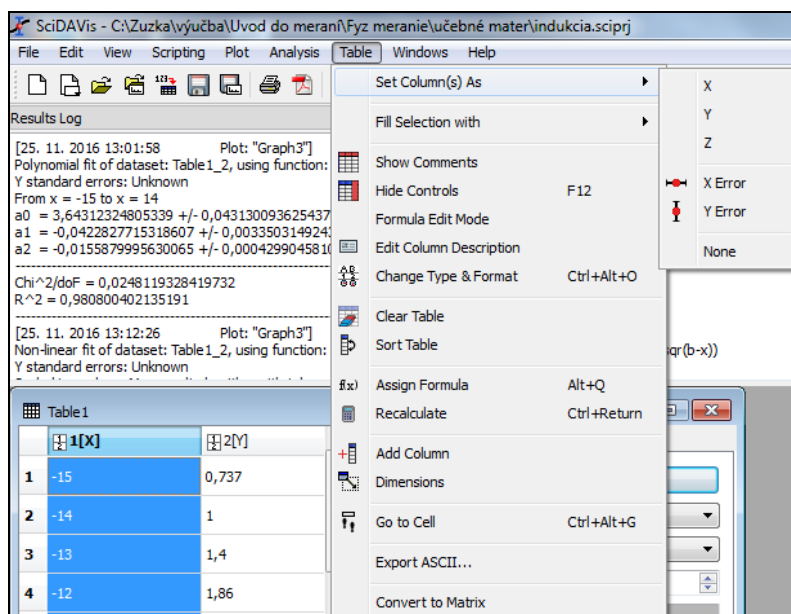
1. V okne (obr. 14) zvolíme možnosť Formula, kde zvolíme v dolnej časti požadovaný stĺpec napr. pre prvý zvolíme col ("1"), stlačíme *Add*.
2. V prázdnej časti pod formulou sa zjaví pridaný stĺpec, ku ktorému pridáme požadovanú operáciu, napr. col ("1")*3,14.
3. Potom stlačíme *Apply*. Počítač automaticky vykoná požadovanú matematickú operáciu so stĺpcom.



Obr. 14

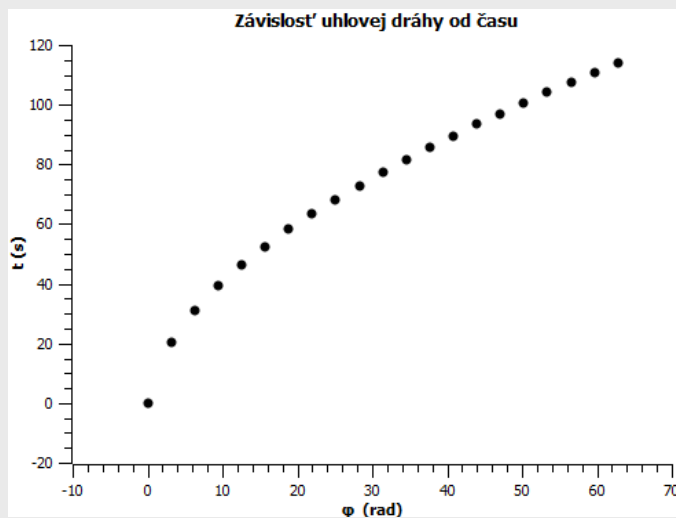
Výmena stĺpcov

1. Kliknutím ľavým tlačidlom myši do tabuľky ju aktivujeme.
2. V tabuľke označíme myšou stĺpec, ktorý chceme zameniť (napr. X).
3. V hornej lište (obr. 15) vyberieme ponuku Table, možnosť *Set Column(s) As*, z príslušnej ponuky vyberieme požadovanú zmenu (napr. pri zmene X za Y, vyberieme Y).



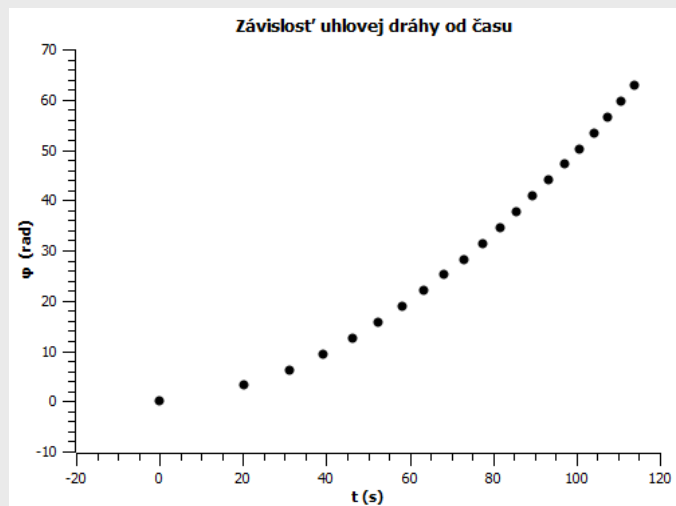
Obr. 15

Príklad 16: Pomocou zmeny poradia stĺpcov opravte odmeranú závislosť na obr. 16 tak, aby zodpovedala teoretickému predpisu $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$.



Obr. 16

Teoretickému predpisu odpovedá matematická funkcia v tvare $y = ax^2 + bx + c$. Zo zobrazenej grafickej závislosti vidieť, že sa podobá na grafickú závislosť typu $y = -ax^2 + bx + c$. Pri tvorbe grafu došlo k zámene poradia stĺpcov, čo sa prejavilo na grafe. Preto pri úprave grafu, dáme v tabuľke zobrazit' hodnoty uhlovej dráhy na os Y a hodnoty odpovedajúceho času na os X, podľa postupu pre výmenu stĺpcov. Graf po úprave je na obr. 17.



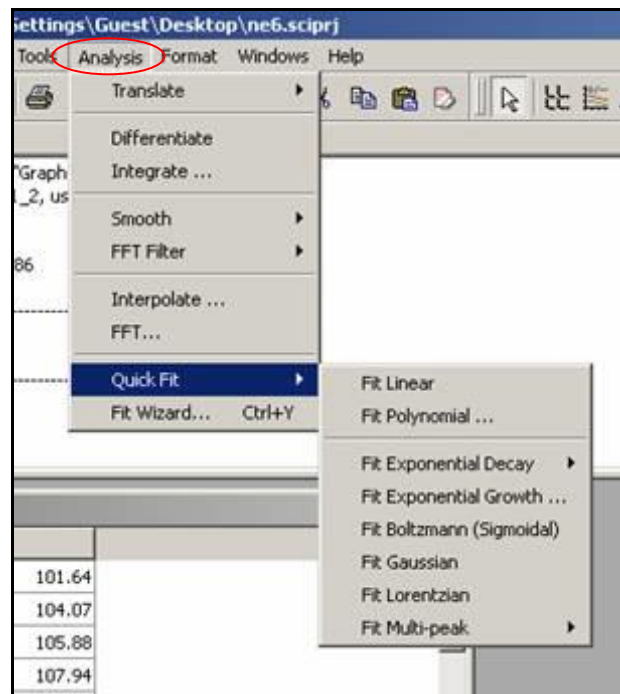
Obr. 17

Fitovanie grafu

1. Nameranú závislosť fitujeme pomocou ponuky Analysis (horná lišta), z ktorej vyberieme možnosť *Quick Fit*.
2. Zvolíme vhodnú funkciu na fitovanie podľa predpokladanej teoretickej závislosti odmeraných hodnôt (napr. Fit Gaussian) (obr. 18).



Pomocou funkcie fitovanie, program zobrazí do grafu regresnú krivku, doplní legendu a vypočítané hodnoty parametrov a, b, \dots s ich absolútnymi štandardnými neistotami v tvare $a = a \pm u_a$, napr. $a = 0,2235 \pm 0,0018$.

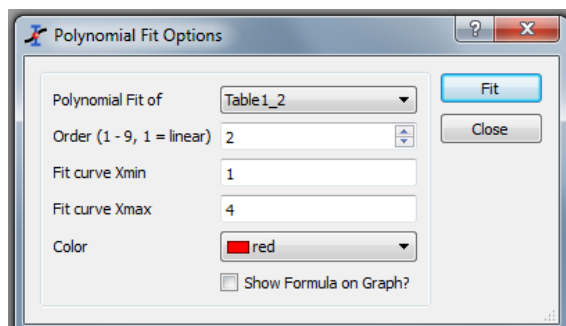


Obr. 18

Napríklad: Pri fitovaní funkčnej závislosti rýchlosti od času $v = v_0 + at$ je vhodnou funkciou na fitovanie lineárna funkcia daná predpisom $y = ax + b$. Preto pri fitovaní zvolíme možnosť *Fit Linear*. Ak budeme fitovať závislosť, ktorá je popísaná mocninovou funkciou napr.

$v = v_0 + a_0t + \frac{1}{3}kt^3$, potom vyberieme možnosť *Fit Polynomial*, kde zvolíme príslušný stupeň polynómu *Order* pre danú funkciu (obr. 19). V tomto prípade je to stupeň 3. Fitovacia funkcia

bude v tvare $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Hranice fitovania (Fit curve Xmin, Fit curve Xmax) sú automaticky doplnené do tabuľky a určuje ich minimálna a maximálna hodnota nezávislej premennej x .



Obr. 19

Príklad 17: Zostrojte graf z tabuľky nameraných hodnôt a fitujte ho vhodnou funkciou, ak teoretická funkčná závislosť popisujúca odmeranú závislosť je $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$. Určte hodnotu počiatočnej dráhy, počiatočnej rýchlosti a zrýchlenia tohto pohybu. Zapište výsledky s neistotami zaokruhlenými podľa pravidiel pre zaokrúhľovanie.

t (s)	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45
s (cm)	15	60	120	190	265	352	444	540	645	759

Tab. 10

Pomocou programu SciDavis zostrojíme graf a fitujeme polynomickou funkciou v tvare $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, kde zvolíme stupeň polynómu 2 (možnosť Order na obr. 19). Hranice fitovania sú určené hodnotami nezávislej premennej x , v tomto prípade časom, kde dolná hranica je 1 a horná 45. Zostrojený graf je na obr. 20.

Porovnaním odmeranej funkčnej závislosti s funkciou na fitovanie vyplýva, že

$$s_0 = a_0, v_0 = a_1, \frac{1}{2}a = a_2.$$

Potom

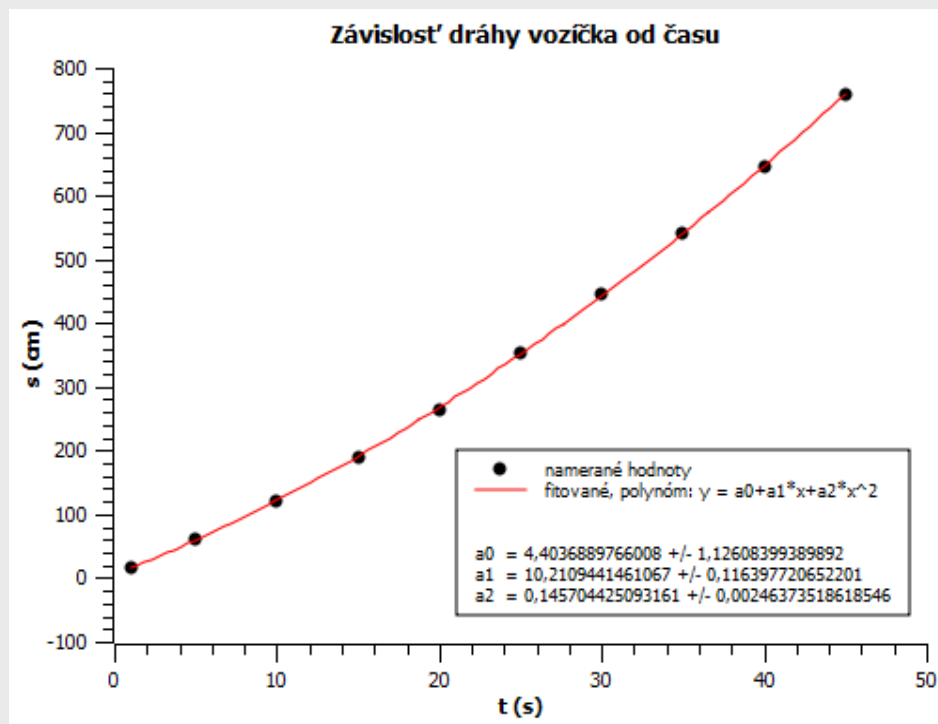
$$s_0 = 4,4036 \text{ m}, v_0 = 10,2109 \frac{\text{m}}{\text{s}}, a = 2a_2 = 2.0,002463 = 0,00492 \text{ m/s}^2.$$

Z legendy ku grafu vyplýva (obr. 20), že absolútne štandardné neistoty počiatočnej dráhy a počiatočnej rýchlosti sú dané neistotami parametrov a_0 a a_1 :

$$u_{s_0} = u_{a_0} = 1,12608 \text{ m}, u_{v_0} = u_{a_1} = 0,11639 \text{ m/s}.$$

Neistota zrýchlenia sa určí ako neistota pri jednorázovom nepriamom meraní

$$u_a = \frac{\partial a}{\partial a_2} u_{a_2} = 2u_{a_2} = 2.0,002463 = 0.004926 \text{ m/s}^2.$$

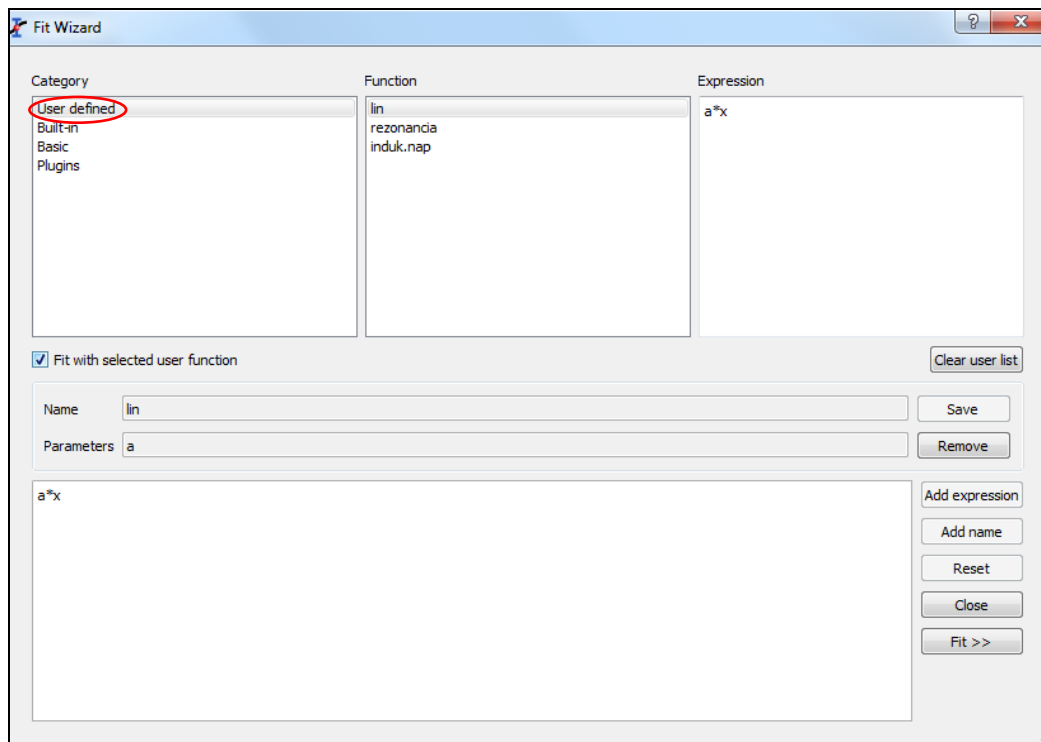


Obr. 20

Zápis výsledkov $s_0 = (4 \pm 2) \text{ m}$, $v_0 = (10,2 \pm 0,2) \text{ m/s}$, $a = (0,291 \pm 0,005) \text{ m/s}^2$.

Vytvorenie vlastnej funkcie na fitovanie

1. Novú funkciu na fitovanie vytvoríme pomocou ponuky Analysis (horná lišta), z ktorej vyberieme možnosť *Fit Wizard ...* alebo *CTRL+Y* (obr. 18).
2. V príslušnom okne (obr. 21) vyberieme druh funkcie: *Category - User defined*, pomenujeme funkciu *Name* (napr. *lin*), zvolíme parametre (napr. *a*). Do okna pod parametre napíšeme funkčný predpis pre novú funkciu (napr. $a*x$). Potom novú funkciu uložíme tlačidlom *Save*.
3. Pri fitovaní novou nami vytvorenou funkciou v okne *Fit Wizard* zaškrtneme voľbu *Fit with selected user function* a stlačíme *Fit >>*.



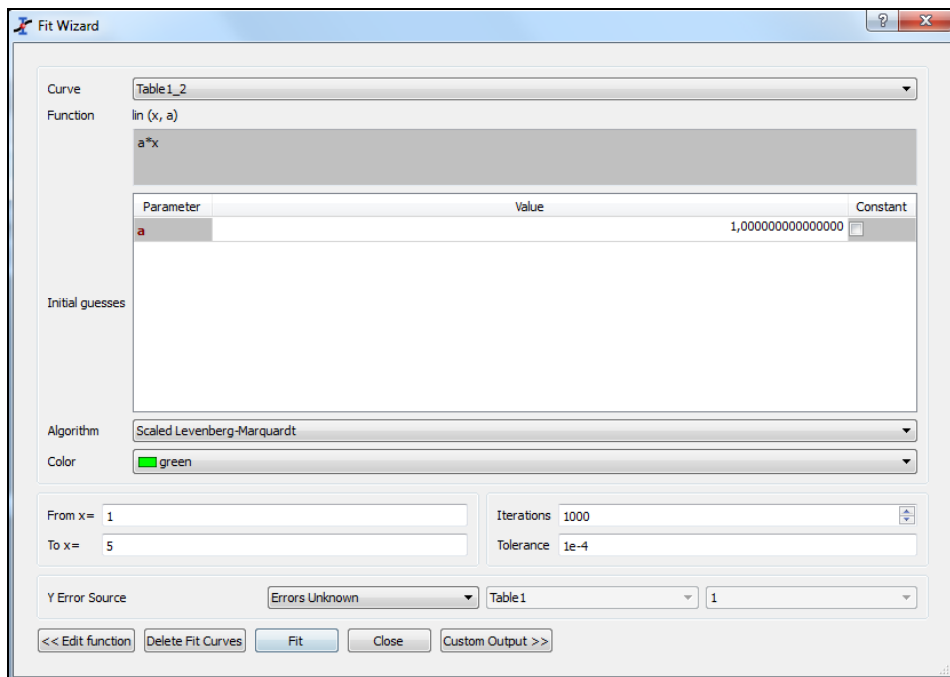
Obr. 21



Pri zápise funkčného predpisu novej fitovacej funkcie sa používajú špeciálne znaky alebo skratky, napríklad pre niektoré typy funkcií:

$$\begin{array}{lll}
 y = ax \rightarrow a*x & y = a/x \rightarrow a/x & y = ae^x \rightarrow a*exp(x) \\
 y = ax^2 \rightarrow a*sqr(x) & y = \sqrt{x} \rightarrow y = sqrt(x) & y = x^{-3} \rightarrow x^(-3).
 \end{array}$$

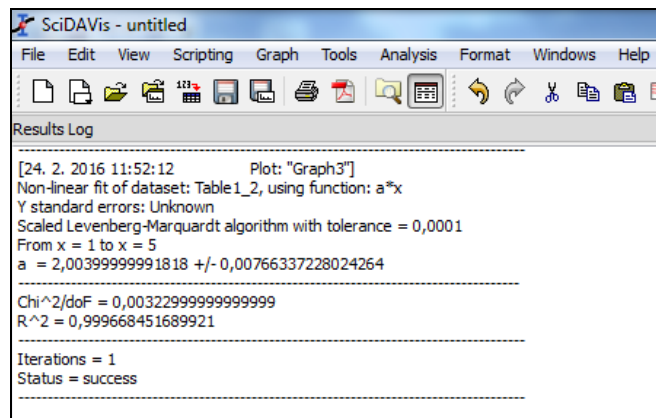
4. V nasledujúcom okne (obr. 22) môžeme meniť farbu fitovacej funkcie, hodnoty parametrov, zvoliť oblasť fitovania, prípadne sa vrátiť späť a opraviť fitovacia funkciu. Ak to nepotrebujeme vykonať, potvrdíme *Fit* a zatvoríme okno *Close*. Program sfituje nameranú závislosť novou vytvorenou funkciou. Jej funkčný predpis s parametrami a ich neistotami sa zobrazia v hornej časti (obr. 23).



Obr. 22

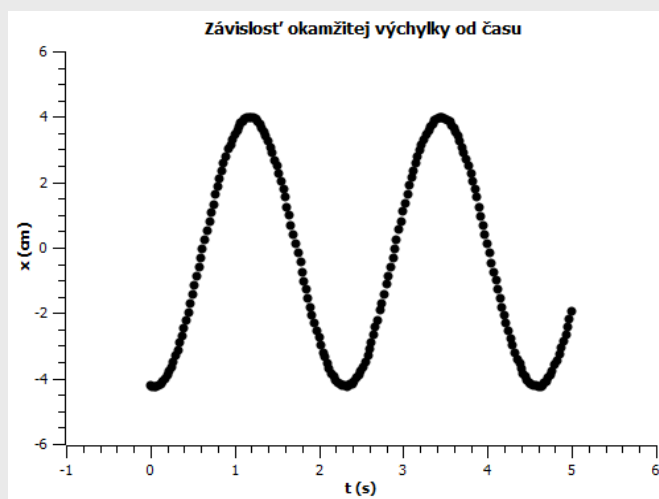


Parametre a , b , c vo fitovacej krivke nastavuje počítač automaticky, preto ich hodnoty nemusia byť vždy správne. Často je potrebné ich hodnoty zvoliť na základe známych parametrov merania.



Obr. 23

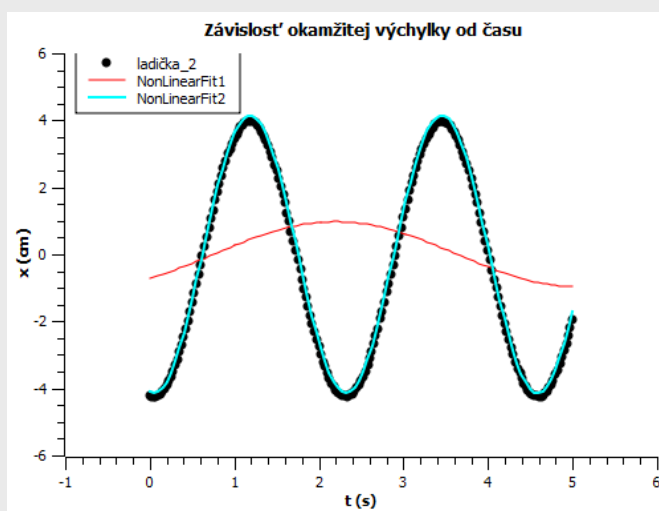
Príklad 18: Zvoľte správne hodnoty parametrov fitovacej funkcie a fitujte odmeranú závislosť okamžitej výchylky netlmeného harmonického pohybu ladičky od času na obr. 24.



Obr. 24

Teoretická závislosť okamžitej výchylky netlmeného harmonického kmitavého pohybu je $x = A \sin(\omega t + \varphi)$. Program SciDavis neponúka funkciu na fitovanie, preto vytvoríme novú funkciu v tvare $y = a * \sin(b * x + c)$. Ponecháme programom automaticky zvolené parametre na fitovanie a funkciu sfitujeme.

Hodnoty parametrov, ktoré automaticky zvolil program sú $a = -0,99$, $b = 1,08$, $c = 0,75$. Fitovacia funkcia pri daných parametroch neprechádza nameranými hodnotami (červená krivka na obr. 25), preto parametre fitovacej krivky musíme zmeniť na vhodné hodnoty.



Obr. 25

Z teoretickej závislosti pre okamžitú výchylku $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ je zrejmé, že parameter a predstavuje amplitúdu výchylky, ktorej hodnotu vieme určiť priamo z grafu, $a = 4$ cm.

Parameter b súvisí s periódou kmitov ($b = 2\pi/T$). Perióda je doba jedného kmitu (doba, za ktorú sa zopakuje napr. maximum výchylky kmitov na tú istú stranu). Jej hodnota je približne

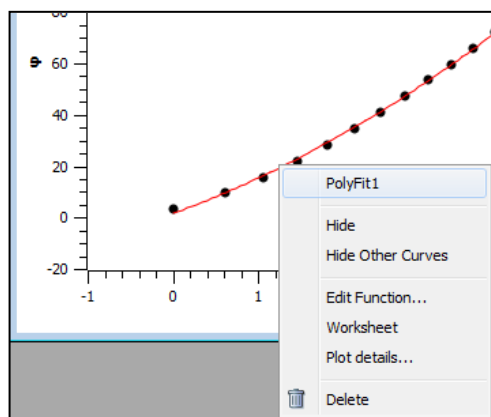
2,3 s, čo vidno z grafu na obr. 25. Nameraná závislosť (čierny body) má menšiu periódu ako fitovacia funkcia (červená krivka) na obr. 25, preto hodnotu parametra b zväčšíme z pôvodnej hodnoty $1,08 \text{ s}^{-1}$ na $6,28/2,3 = 2,73 \text{ s}$, čím dosiahneme zmenšenie periódy.

Hodnotu paramera c nezmeníme.

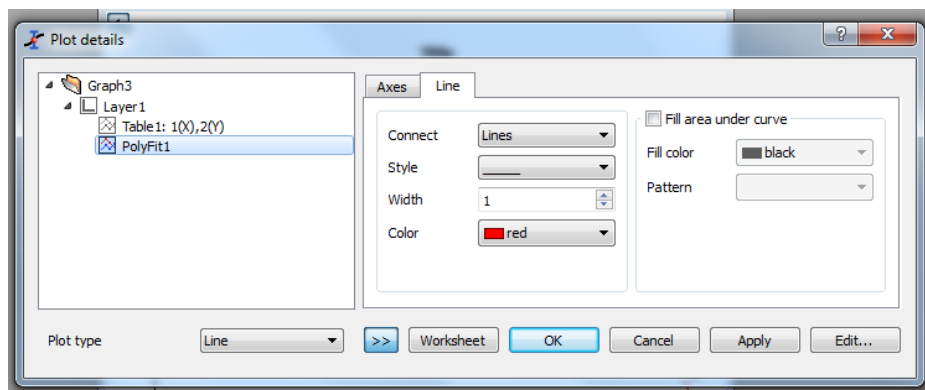
Nová fitovacia funkcia pre zmenené hodnoty parametrov už prechádza nameranými hodnotami (modrá krivka na obr. 25), ktorej parametre sú $a = -4,14 \text{ cm}$, $b = 2,77 \text{ s}$, $c = 0,14 \text{ rad}$.

Zmazanie fitu v grafe

1. Klikneme pravým tlačidlom myši do grafu na krivku fitu, ktorý chceme zmazať. Objaví sa ponuka (obr. 26), v ktorej v hornej časti je uvedené meno fitu (napr. *PolyFit1*).
2. V dolnej časti ponuky na obr. 26 zvolíme možnosť *Delete* alebo kliknutím na pomenovanie fitu sa objaví tabuľka (obr. 27), v ktorej v ľavej časti potvrdíme výber fitu, ktorý chceme zmazať a stlačíme *Delete* na klávesnici počítača.
3. V tejto tabuľke (obr. 27) je možné ďalej upravovať fitováciu krivku (zvoliť jej farbu – *color*, hrúbku čiary – *width*, zobrazit plochu pod krivkou – *fil area under curve*).



Obr. 26

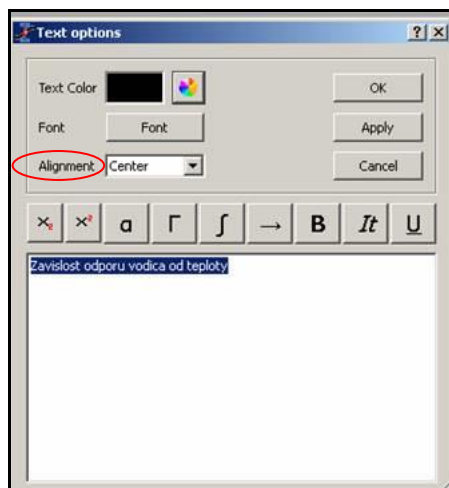


Obr. 27

Úprava označenia osí a názvu grafu

V grafe, ktorý získame upravíme názov grafu a označenie jednotlivých veličín pri osiach, ktoré sú zatiaľ všeobecne označené (x , y) a doplníme jednotky meraných veličín pri osiach podľa nasledujúceho postupu.

1. Pri úprave názvu grafu klikneme dvakrát ľavým tlačidlom myši na názov grafu a do okna, ktoré sa zobrazí na obrazovke zapíšeme názov grafu (obr. 28). Vyberieme pozíciu kde ma byť umiestnený (*Alignment*: Center, Right, ...), na úpravu písma použijeme príslušné tlačidlá napr. pre tučné písmo **B**.

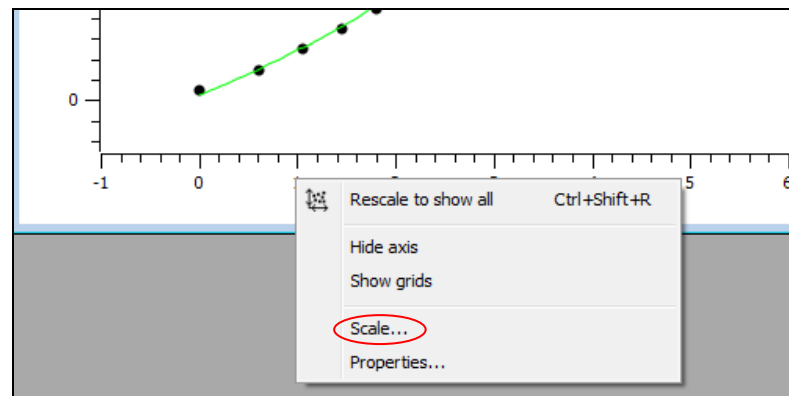


Obr. 28

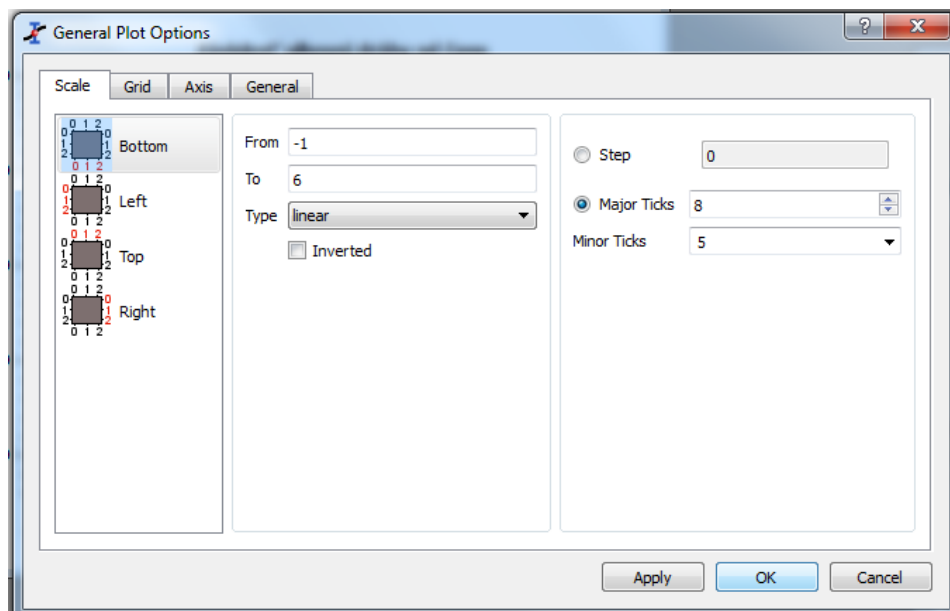
2. Pri úprave popisu veličín pre jednotlivé osi grafu a ich jednotiek postupujeme rovnako.

Úprava škály osí

1. Pri úprave škály osí klikneme pravým tlačidlom myši na číslo príslušnej osí a zvolíme možnosť *Scale* (obr. 29).
2. V tabuľke, ktorá sa otvorí (obr. 30) v záložke *Scale* volíme hodnoty intervalu stupnice na príslušnej osí: od (*From*) do (*To*).
3. Je možné zvoliť delenie dielikov na stupnici: hlavné (*Major Ticks*) a vedľajšie (*Minor Ticks*).
4. Po nastavení požadovaných hodnôt potvrdíme *Apply* a stlačíme *OK*.



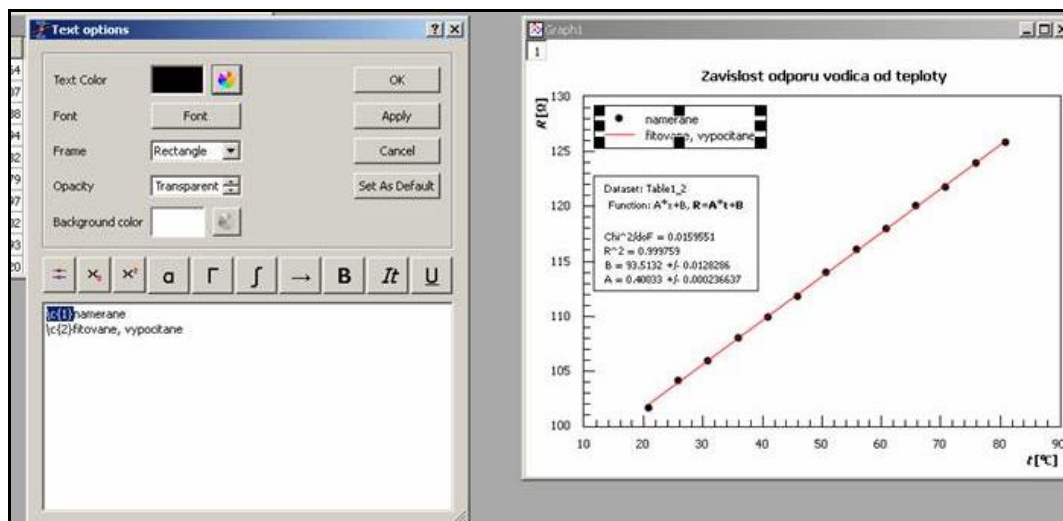
Obr. 29



Obr. 30

Úprava popisu legendy

1. Pri úprave popisu legendy klikneme ľavým tlačidlom myši dvakrát na legendu a do okna Text options zapíšeme k výrazu $c\{1\}$ text „*namerané hodnoty*“ a k výrazu $c\{2\}$ „*fitované, vypočítané hodnoty*“ (obr. 31).
2. Do tabuľky pod legendou dopíšeme ku funkčnému predpisu *Function* (napr. $A*x + B$) funkčný predpis odmeraných hodnôt (napr. $A*t + B$).



Obr. 31

Uloženie projektu

Všetky tabuľky a grafy sa ukladajú do súboru (tzv. projekt). Projekt sa ukladá v možnosti File na hornej lište, kde sa volí ponuka *Project save as*.

Kopírovanie tabuľky a grafu

Zostrojený graf a tabuľku kopírujeme nasledovne:

1. klikneme pravým tlačidlom myši na tabuľke (grafe), vyberieme možnosť Copy a zvolíme *Window*,
2. nakopírované dáta preniesieme do Wordu alebo Excelu.



Preskúšajte sa – 3.4

1. Pre dané teoretické funkčné závislosti napíšte formulu (matematický funkčný predpis) pre fitovanie krivky v SciDavis

a) $I = \frac{U}{R}$, kde R - konš.,

b) $x = Ae^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)$, kde A, b, ω, φ - konš.,

c) $v = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$, kde a, v_0 - konš.,

[Výsledky](#)

d) $I = \sqrt{\frac{1}{t^4}}$.

2. a) Zostrojte graf z nameraných hodnôt z [príkladu 14](#) pomocou SciDavisu a fitujte ho vhodnou funkciou.

b) Pripočítajte k hodnotám v druhom stĺpci (Y) hodnotu 2. Zostrojte nový graf a fitujte ho vhodnou funkciou. Ako sa líši nový graf od pôvodného? Prečo? Čo predstavuje hodnota 2 v novom grafe?

3. a) Zostrojte graf závislosti fotoelektrického napätia pri osvetlení fotónky od rôznej frekvencie dopadajúceho svetla pomocou programu SciDavis. Odmerané hodnoty napätia a frekvencií sú v tab. 11.

b) Fitujte graf vhodnou funkciou, predpokladaná teoretická závislosť napätia je

$$U = \frac{h}{e} f + \frac{-W}{e} \quad (1), \text{ kde } h \text{ je Planckova konštanta, } W \text{ je výstupná práca elektrónu a } e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C je náboj elektrónu.}$$

c) Pomocou parametrov fitovacej funkcie určte hodnotu Planckovej konštanty a výstupnej práce elektrónu.

d) Určte absolútne štandardné neistoty Planckovej konštanty a výstupnej práce elektrónu. Zapište správne výsledky.

$f \text{ (Hz)} \cdot 10^{14}$	5,19	5,49	6,88	7,41	8,2
$U \text{ (V)}$	0,082	0,136	0,583	0,802	1,174

Tab. 11

[Výsledky](#)

4. a) Zostrojte graf pomocou SciDavisu pre závislosť zrýchlenia netlmeného harmonického kmitavého pohybu závažia od času (tab. 12), ktorého teoretický predpis je $a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$, kde $f = 1 \text{ Hz}$, $\varphi = 30^\circ$.

b) Fitujte graf vhodnou funkciou.

c) Určte hodnotu maximálneho zrýchlenia a amplitúdy.

	t (s)	a (m/s ²)
1	0	-0,19
2	0,1	-0,36
3	0,2	-0,38
4	0,3	-0,26
5	0,4	-0,041
6	0,5	0,19
7	0,6	0,35
8	0,7	0,38
9	0,8	0,26
10	0,9	0,042
11	1	-0,19
12	1,1	-0,35
13	1,2	-0,38
14	1,3	-0,26
15	1,4	-0,043
16	1,5	0,19
17	1,6	0,35
18	1,7	0,38
19	1,8	0,26
20	1,9	0,043

Tab. 12

5. a) Zostrojte graf pomocou SciDavisu pre závislosť uhlovej dráhy rovnomerne spomaleného otáčavého pohybu rotačnej sústavy od času (tab. 13), ktorého teoretický predpis je $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2$.

b) Fitujte graf vhodnou funkciou.

[Výsledky](#)

- c) Určte hodnoty počiatočnej uhlovej rýchlosti, počiatočného uhla a uhlového zrýchlenia a ich príslušné absolútne štandardné neistoty. Zapište správne výsledky.

	t (s)	φ (rad)
1	1	7,5
2	5	33
3	10	63
4	15	85,09
5	20	99
6	25	105
7	30	104
8	35	95
9	40	79,8
10	45	55

Tab. 13

6. a) Zostrojte graf pomocou SciDavisu pre závislosť dráhy rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu auta od času (tab. 14), ktorého teoretický predpis je

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

- b) Fitujte graf vhodnou funkciou.

[Výsledky](#)

- c) Určte hodnoty počiatočnej rýchlosti, počiatočnej dráhy a zrýchlenia.

	t (s)	s (m)
1	0	4,1
2	1	8,2
3	2	18
4	3	33,9
5	4	55,9
6	5	84,1
7	6	118
8	7	158
9	8	203,5
10	9	256
11	10	314
12	11	377,5
13	12	448
14	13	524

Tab. 14

7. a) Merný náboj bol odmeraný pomocou Helmholtzovych cievok, kde sa merala závislosť prúdu pretekajúceho cievkami od urýchľujúceho napätia elektrónov. Zostrojte graf pomocou SciDavisu pre závislosť $I = f(U)$. Odmerané hodnoty napätia a prúdu sú v tab. 15.

- b) Fitujte graf vhodnou funkciou, ak merný náboj je daný vzťahom $\frac{e}{m} = \frac{2U}{(kIr)^2}$.

- c) Pomocou odmeranej závislosti $I = f(U)$, určte hodnotu merného náboja pre polomer dráhy elektrónov $r = 3$ cm, ak parameter charakterizujúci cievky je $k = 6,92 \cdot 10^{-4} \text{ kg s}^2 \text{ A}^{-2}$.

- d) Určte absolútnu štandardnú neistotu merného náboja pre polomer dráhy elektrónov $r = 3$ cm a zapíšte správne výsledok.

	<i>U</i> (V)	<i>I</i> (A)
1	100	1,6
2	120	1,7
3	140	1,9
4	160	2
5	180	2,2
6	200	2,3
7	220	2,4
8	240	2,5
9	260	2,6
10	280	2,7
11	300	2,8

Tab. 15

8. a) Zostrojte graf pomocou SciDavisu pre závislosť amplitúdy tlmeného kmitavého pohybu pružinového oscilátora od času (tab. 16), ktorej teoretický predpis je $A = A_0 e^{-bt}$.
- b) Fitujte graf vhodnou funkciou. [Výsledky](#)
- c) Určte hodnoty prvej netlmenej amplitúdy a koeficientu útlmu.

	<i>A</i> (cm)	<i>t</i> (s)
1	1	9,1
2	5	8,1
3	10	7,3
4	15	6,3
5	20	5,5
6	25	4,6
7	30	4
8	35	3,51
9	40	3
10	45	2,6

Tab. 16

9. Vyberte správnu odpoveď. Graf v SciDavise zostrojíme tak, že označíme y-ový stĺpec a v hornej lište zvolíme ponuku
- a) Plot-Scater,
- b) Analysis,
- c) Plot-Analysis.
10. Vyberte správnu odpoveď. Zmena formátu čísla v stĺpci sa uskutoční tak, že klikneme na daný stĺpec a zvolíme

- a) Type-Format,
 - b) Type-Formula,
 - c) Type-Description.
11. Vyberte správnu odpoveď. Pri fitovaní grafu vlastnou funkciou volíme
- a) Analysis-Quit fit,
 - b) Analysis-Fit Wizard,
 - c) Analysis-Quit fit-Fit linear. [Výsledky](#)
12. Vyberte správnu odpoveď. Pri fitovaní grafu lineárnou funkciou typu $y = ax + b$ volíme
- a) Analysis-Quit fit,
 - b) Analysis-Fit Wizard,
 - c) Analysis-Quit fit-Fit linear.
13. Vyberte správnu odpoveď. Výmenu stĺpcov v tabuľke sa uskutoční nasledovným postupom. V aktívnej tabuľke zvolíme v hornej lište
- a) možnosť Table a vyberieme Set Column(s) As,
 - b) možnosť Plot a vyberieme Set Column(s) As,
 - c) možnosť Table a vyberieme Add column.
14. Vyberte správnu odpoveď. Pri úprave názvu grafu
- a) klikneme dvakrát ľavým tlačidlom myši na názov grafu a do okna, ktoré sa zobrazí na obrazovke zapíšeme názov grafu,
 - b) klikneme dvakrát pravým tlačidlom myši na názov grafu a do okna, ktoré sa zobrazí na obrazovke zapíšeme názov grafu,
 - c) klikneme raz ľavým tlačidlom myši na názov grafu a do okna, ktoré sa zobrazí na obrazovke zapíšeme názov grafu.
-

4 Systém IP - Coach

Na laboratórných cvičeniach budú niektoré úlohy merané pomocou systému počítačom podporovaného laboratória IP – Coach. Aký je to systém, z čoho pozostáva?



Základné pojmy:

systém IP - Coach, otvorenie programu, výber úlohy na meranie, spustenie merania, zastavenie merania, uloženie nameranej úlohy, fitovanie grafu, derivovanie grafu, prezeranie grafu, úpravy v grafe a tabuľke, štatistika nameraných údajov, kopírovanie grafu a tabuľky

V tejto kapitole sa oboznámime so systémom IP - Coach, pomocou ktorého budeme merať niektoré laboratórne úlohy. Stručne popíšeme merací panel CoachLab⁺, obrazovku programu a jej ikony. Uvedieme návod ako merať a spracovať namerané hodnoty pomocou príslušného programu.

4.1 Systém IP - Coach

Systém IP - Coach (systém počítačom podporovaného laboratória) je univerzálne prostredie, používané vo fyzike a v iných prírodovedných predmetoch. Integruje nástroje pre meranie, ovládanie zariadení počítačom, videomeranie, modelovanie, tvorbu interaktívnych animácií, pokročilé spracovanie dát a analýzu dát.

Meranie umožňuje zber dát zo senzorov pripojených k meraciemu panelu, pri rôznych nastaveniach podmienok merania.

Pomocou **ovládania** je možné vytvárať a používať programy na ovládanie ďalších prístrojov pripojených k meraciemu panelu (napr. aparáturu na demonštráciu mechanickej rezonancie).

Modelovanie umožňuje používať a vytvárať dynamické modely v grafickom alebo textovom móde. Dáta vypočítané modelom (predpoveď) je možné porovnávať s nameranými dátami.

Videomeranie slúži na zber dát z videosekvencie alebo sekvencie obrázkov z digitálneho fotoaparátu.

Systém IP - Coach pozostáva z meracieho panela (interfejs), senzorov a príslušného softvéru.

Merací panel zabezpečuje prenos informácií medzi laboratóriom a počítačom. V našom laboratóriu používame meracie panely *CoachLabII* a *CoachLabII+* (manuál ku *CoachLab+* nájdete na <http://www.ddp.fmph.uniba.sk/~demkanin/CoachWebII/PDF/d006pSK.pdf>).

Merací panel *CoachLabII+* sa pripája k počítaču prostredníctvom USB portu ([obr. 32](#), vstup 5). Napájaný je sieťovým adaptérom ([obr. 32](#), vstup 4). Má 10 kanálov, ktoré slúžia na pripojenie senzorov ([obr. 32](#), kanály 1, 6), ako zdroj napätia ([obr. 32](#), kanál 2) alebo na ovládanie pripojených prístrojov ([obr. 32](#), kanály 3). Kontrolky výstupov ([obr. 32](#), položka 7) sa pri zapojení meracieho panela postupne rozsvietia a počas merania už nesvietia. Kontrolka napájania ([obr. 32](#), položka 8) svieti počas celej prevádzky panelu zelenou farbou.



Popis meracieho panela CoachLabII je rovnaký ako panela CoachLabII+. Rozdiel je len v pripojení k počítaču, preto podrobný popis nie je uvedený.

4.2 Softvér Coach 5

V tejto časti sa sústreďíme na popis obrazovky a jednotlivých funkcií potrebných k meraniu a spracovaniu nameraných hodnôt v programe Coach 5.

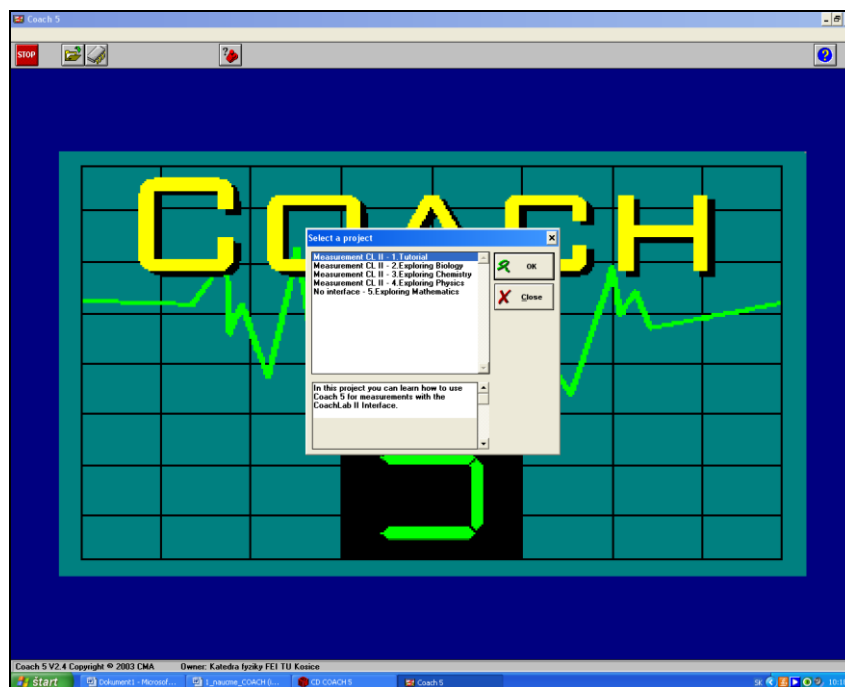
4.2.1 Otvorenie programu a voľba úlohy na meranie

Program Coach 5 otvoríme kliknutím na ikonu (obr. 33) na obrazovke počítača.



Obr. 33

Po kliknutí na túto ikonu sa otvorí hlavné okno (obr. 34), ktoré slúži na výber nástroja na spracovanie (v našom prípade pôjde o výber merania alebo videomerania).



Obr. 34

Z okna Select a project vyberieme pre meranie ponuku *Measurement CLII - 4, Exploring Phycics*. V prípade videomerania zvolíme možnosť *Data video – 2. Examples* a odklikneme OK.



Ak sa okno Select a project neotvorí môžeme ho otvoriť kliknutím na ikonu Open project zobrazenú na obr. 35, ktorá sa nachádza na hornej lište vľavo v hlavnom okne ([obr. 34](#)).



Obr. 35

Výber úlohy na meranie tzv. aktivity uskutočníme tak, že v okne Open an activity ([obr. 36](#)), na obrazovke počítača, vyberieme z ponuky úlohu podľa označenia (napr. NG2) a potvrdíme výber stlačením OK.



Obr. 36



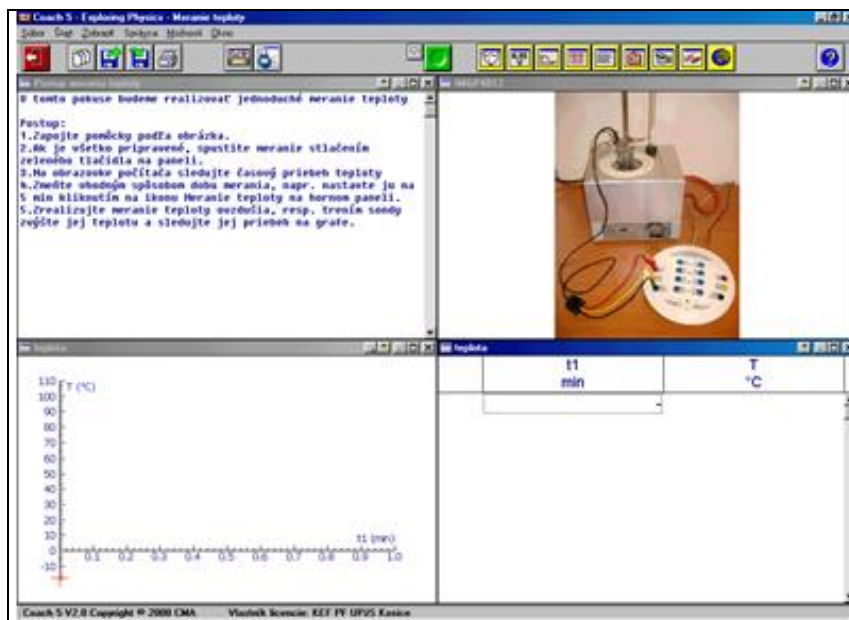
Ak sa okno Open an activity neotvorí je možné ho otvoriť kliknutím na ikonu Open activity ([obr. 37](#)), ktorá sa nachádza na hornej lište vľavo v hlavnom okne ([obr. 36](#)).



Obr. 37

4.2.2 Meranie, videomeranie a spustenie merania

Po otvorení požadovanej úlohy na *meranie* (Open an activity) sa objaví na obrazovke okno (obr. 38), ktoré má v hornej časti rôzne ikony, ktoré slúžia na ovládanie merania. Toto okno je rozdelené na štyri menšie okná, ktoré môžu obsahovať text, tabuľku, graf, obrázok.



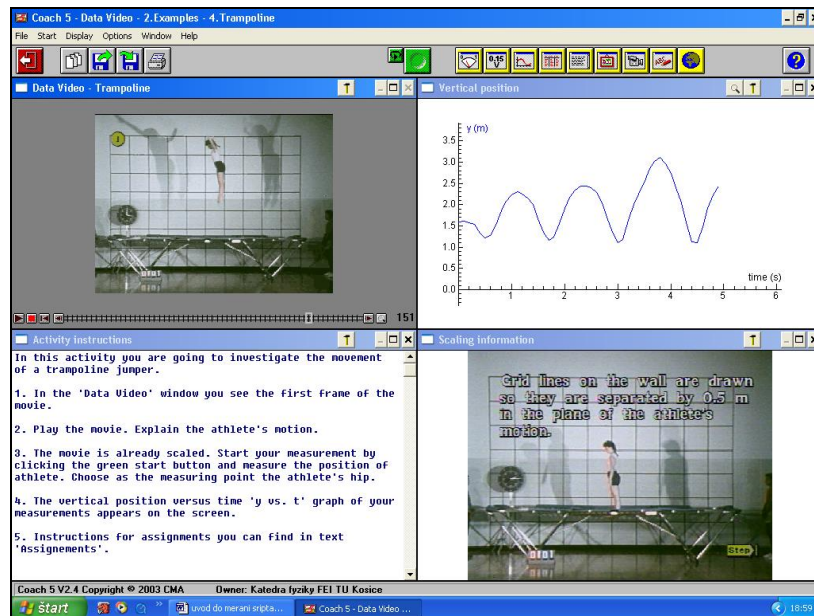
Obr. 38

V tab. 17 sú uvedené ikony, ktoré pri meraní budeme používať.


	zavrieť projekt (úlohu)		otvoriť aktivitu (úlohu)
	otvoriť výsledky		uložiť výsledky (úlohu)
	spustenie merania - štart		zastavenie merania - stop
	jednotlivé meranie - štart		jednotlivé meranie - stop

Tab. 17


V prípade **videomerania**, sa po otvorení úlohy na videomeranie (Open an activity), na obrazovke zobrazí okno (obr. 39). V jeho ľavom hornom okne je umiestnené video, pomocou ktorého budeme merať. Pri videomeraní používame rovnaké ikony ako pri meraní (tab. 16).




Obr. 39

Meranie aj videomeranie spúšťame stlačením **zeleného** tlačidla Štart  na hornej lište v strede na obrazovke (obr. 38, obr. 39), ktoré sa po kliknutí zmení na červené tlačidlo. Meranie zastavíme stlačením toho istého (teraz **červeného**) tlačidla. Táto ikona umožňuje meranie kedykoľvek zastaviť resp. prerušiť. Takto spúšťame a zastavujeme meranie, ktoré nepozostáva z ďalších meraní (napr. odmeriame dobu kyvu kyvadla pri danej polohe osi rotácie kyvadla).

Pri spustení videomerania sa na videu zobrazí malý krížový kurzor, ktorým volíme bod na videu (napr. hlava skokanky), ktorého hodnoty meriame (napr. rýchlosť). Videomeranie prebieha tak, že video sa posúva po jednotlivých snímkach, na ktorých pomocou spomínaného kurzora klikáme na ten istý zvolený bod. Súčasne sa do grafu zobrazujú odmerané hodnoty pre zvolený bod.

V prípade, že meranie pozostáva zo samostatných meraní, meranie začneme stlačením tlačidla Štart , ale pre jednotlivé merania ďalej používame ikonu Jednotlivé meranie - štart

(tab. 16). Požívame ju pri opakovanom meraní, keď chceme odmerať zmenenú hodnotu veličiny. Meranie ukončíme stlačením tlačidla Jednotlivé meranie - Stop .

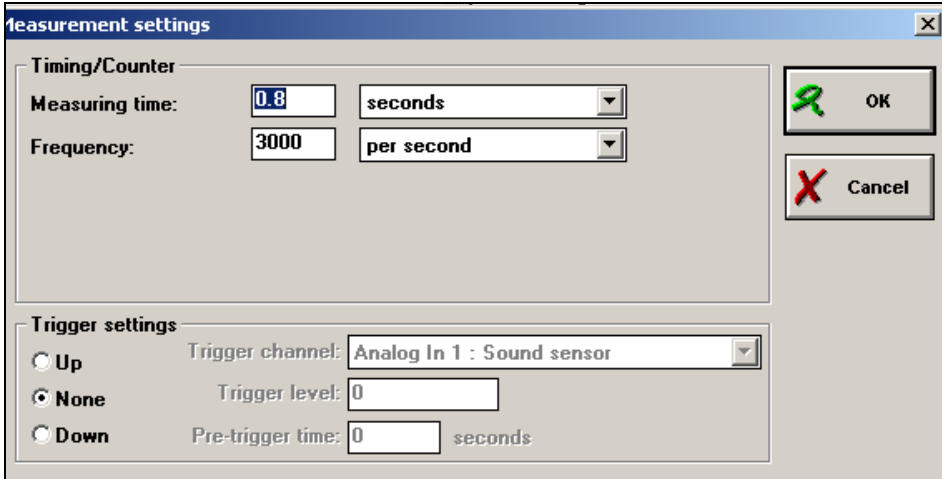
Napríklad: Zmeníme objem vzduchu v injekčnej striekačke a odmeriame príslušnú hodnotu tlaku kliknutím na ikonu Jednotlivé meranie – štart. Na obrazovke sa objaví okienko na zápis zmenenej hodnoty objemu. Po jej zapísaní systém Coach odmeria a zaznamená do tabuľky príslušnú hodnotu tlaku. Tento postup sa zopakuje niekoľkokrát. Nakoniec kliknutím na červenú ikonu Jednotlivé meranie - Stop meranie zastavíme.

Pri niektorých úlohách (napr. vybíjanie kondenzátora) po spustení merania (ikona Štart) počítač nezačne merať. Na obrazovke sa objaví okienko, v ktorom je informácia, že systém čaká na spustenie merania. Meranie sa automaticky spustí, keď ručne dáme kondenzátor vybíjať.



Ak je v úlohe nastavený čas merania, v takomto prípade sa meranie automaticky zastaví, úlohu netreba ručne zastaviť kliknutím na ikonu Stop.

Nastavenie parametrov merania





The image shows a software dialog box titled "Measurement settings". It is divided into two main sections: "Timing/Counter" and "Trigger settings".

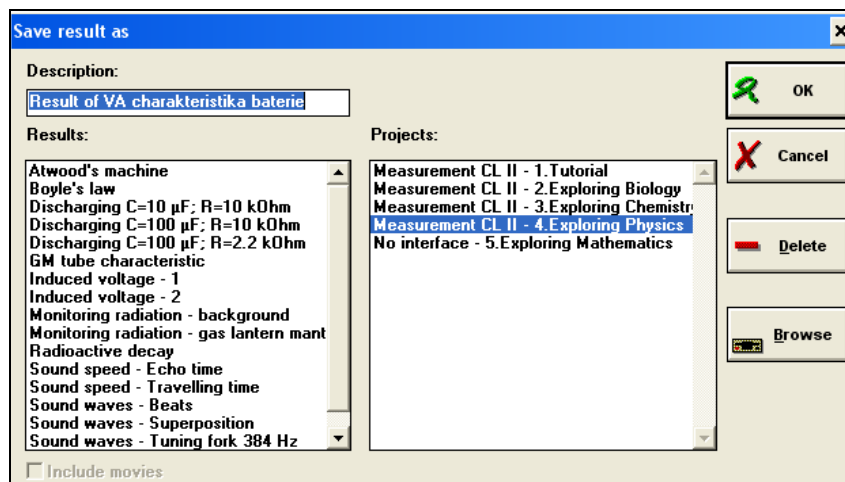
- Timing/Counter:**
 - Measuring time:** A text input field containing "0.8" and a dropdown menu set to "seconds".
 - Frequency:** A text input field containing "3000" and a dropdown menu set to "per second".
- Trigger settings:**
 - Three radio buttons: "Up", "None" (which is selected), and "Down".
 - Trigger channel:** A dropdown menu showing "Analog In 1 : Sound sensor".
 - Trigger level:** A text input field containing "0".
 - Pre-trigger time:** A text input field containing "0" followed by the unit "seconds".

On the right side of the dialog, there are two buttons: "OK" with a green checkmark icon and "Cancel" with a red X icon.

Obr. 40

Niekedy pri meraní potrebujeme zmeniť čas merania alebo spôsob merania. Tieto parametre nastavujeme v samostatnom okne, ktoré dostaneme kliknutím na ikonu  Measurement settings (Hodnoty merania) v hornej lište vľavo. V danom okne (obr. 40) volíme čas merania v príslušných jednotkách (napr. 50 ms) a frekvenciu merania. Spôsob spustenia merania (Trigger settings) nastavujeme v dolnej časti okna. V prípade nastavenia *None* meranie spúšťame ručne.

Výsledky merania (videomerania) a úlohu merania uložíme pomocou ikony  Save result as (Uložiť výsledky ako). Po jej potvrdení sa otvorí okno (obr. 41), v ktorom do okienka *Description* napíšeme názov meranej úlohy (napr. svoje meno).



Obr. 41

4.2.3 Spracovanie nameraných hodnôt

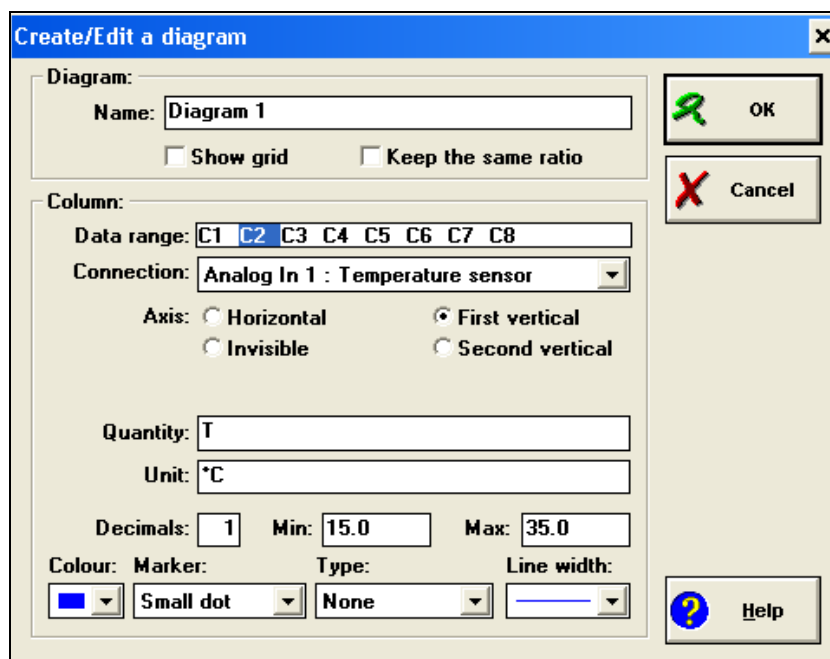
Namerané dáta systém Coach poskytuje vo forme tabuliek a grafov, ktoré môžeme ďalej upravovať.

Všetky **úpravy v grafe** (zmena rozsahu osí, typ čiary, ...) urobíme pomocou ponuky Create/Edit Diagram... (Vytvorenie / Úprava Diagramu...) (obr. 42), ktorú získame výberom z ponuky, ktorá sa nám otvorí po kliknutí pravým tlačidlom myši priamo na grafe.

V okne Create/Edit Diagram (obr. 42) môžeme:

1. zadať *názov grafu* - *Name*,
2. zvoliť *dáta*, ktoré budeme upravovať *Data range* (C₁, C₂, ...),
3. zvoliť *osi* - *Axis* pre zobrazovanie (napr. *Horizontal* - vodorovná),
4. popísať *veľičinu* - *Quantity*, ktorá bude zobrazená na osi a zvoliť jej *jednotku* - *Unit*,
5. zvoliť rozsah na osi *Min*, *Max*,
6. zvoliť *farbu* - *Colour* čiary grafu, *znak* - *Marker* (napr. *Small dot* - malé body),
7. zadať *typ* - *Type* grafu (napr. *Line* – body v grafe budú pospájané),
8. zvoliť *hrúbku čiary* - *Line width*.

Napríklad: Ak naše namerané hodnoty sú v intervale od 100 do 110 a na osi je nastavený rozsah do 150, t.j. máme v grafe zle nastavený rozsah na osiach, použijeme na úpravu rozsahu možnosť 5 v ponuke úpravy v grafe.

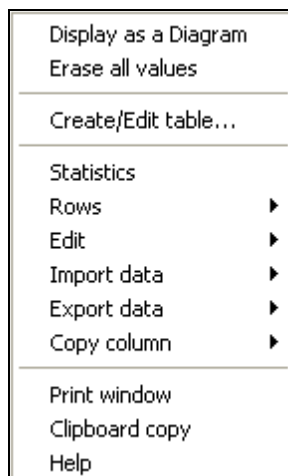


Obr. 42



Niekedy sa pri fitovaní grafu pomýlime a potrebujeme, aby fitovacia funkciu systém nezobrazoval v grafe. Vtedy môžeme pre dané dáta (napr. C₄, kde v *Connection* je zobrazený funkčný predpis fitovacej funkcie) zvoliť zobrazenie neviditeľnej osi (*Axis: Invisible*) alebo v *Connection* zvoliť ponuku *Empty*.

Úpravy v tabuľke vykonávame pomocou ponuky (obr. 43), ktorú získame kliknutím pravého tlačidla myši priamo na tabuľke.



Obr. 43

Pomocou ponuky môžeme:

1. *zobraziť ako tabuľku (Display as Diagram)* – zobrazí hodnoty v grafe ako tabuľku,
2. *zmazať všetky hodnoty (Erase all values)* v tabuľke,
3. *vytvoriť / upraviť tabuľku (Create / Edit Table)* – podobná funkcia ako pri grafe,
4. *upravovať riadky (Rows)* – vybrať, mazať, triediť a pod.,
5. *robiť úpravy (Edit)* – mazať, kopírovať a pod.,
6. *získať štatistiku (Statistics)* nameraných hodnôt,
7. *kopírovať obrazovku okna (Clipboard copy)*.



Všetky úpravy v grafe a v tabuľke je možné uskutočniť, len ak nie je spustené meranie.

Štatistiku nameraných dát získame pomocou ponuky Statistics (obr. 43), ktorú získame kliknutím pravého tlačidla myši priamo na tabuľke. Po potvrdení tejto voľby sa objaví tabuľka so štatistickými údajmi (obr. 44).

	time s	V V
Number:	501	501
Max:	10.0	3.15
Min:	0.0	1.44
Average:	5.0	2.56
Sum:	2505.0	1282.46
Sum sqr:	16716.7	3469.98
s(n):	2.9	0.61
s(n-1):	2.9	0.61

Obr. 44

Pre každý stĺpec dát sú v tabuľke zobrazené nasledovné položky:

number - počet meraní,

max - maximálna hodnota meranej veličiny,

min - minimálna hodnota meranej veličiny,

average - stredná hodnota (výberový priemer),

sum - súčet všetkých hodnôt,

sum sqr - súčet druhých mocnín všetkých hodnôt,

s(n) - štandardná odchýlka z *n* hodnôt,

s(n-1) - štandardná odchýlka z *n - 1* hodnôt.

Napríklad: V tabuľke na [obr. 44](#) je súčet odmeraných časov a súčet ich druhých mocnín

$$\sum_{i=1}^n t_i = 2505 \text{ s}, \quad \sum_{i=1}^n t_i^2 = 16716,7 \text{ s}^2, \quad \text{výberový priemer napätia } \bar{U} = 2,56 \text{ V}, \quad \text{štandardná}$$

odchýlka z *n* hodnôt pre napätie je 0,61 V a počet meraní je *n* = 501.

Štatistickú tabuľku kopírujeme priamo pomocou ponuky *Copy* ([obr. 44](#)) a pre ďalšie spracovanie hodnôt ju môžeme umiestniť do súboru v programe Word alebo Excel.



Pomocou hodnôt zo štatistickej tabuľky sa dá jednoduchšie vypočítať štandardná neistota typu A, ktorej vzťah vyjadrený pomocou štandardnej odchýlky z n hodnôt bude upravený na tvar

$$u_{A\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{s(n)}{\sqrt{n-1}}. \quad (4.1)$$

Hodnoty n , $s(n)$ sa odčítajú zo štatistickej tabuľky.

Príklad 19: Vypočítajte absolútnu a relatívnu štandardnú neistotu merania pružnej sily pri harmonickom kmitavom pohybe pružiny, ktorá bola určená pomocou senzora sily a systému IP – Coach. Odmerané hodnoty sú v štatistickej tabuľke (tab. 18). Zapište správne výsledky merania s neistotami.

	x	F
	m	N
Number:	7	7
Max:	0,1080	0,36
Min:	0,0360	0,13
Average:	0,0720	0,24
Sum:	0,5040	1,70
Sum sqr:	0,0403	0,45
s(n):	0,0240	0,08
s(n-1):	0,0259	0,08

Tab. 18

Hodnota pružnej sily bola odmeraná 7-krát, priamo pomocou senzora sily, ktorý zaznamenával pôsobiacu silu pri harmonickom kmitavom pohybe pružiny (priame opakované meranie). Na vyjadrenie absolútnej štandardnej neistoty použijeme vzťah (2.5), pre kombinovanú štandardnú neistotu. Najprv vyjadríme štandardnú neistotu typu A pomocou vzťahu (4.1), kde hodnoty $s(n) = 0,083$ N a $n = 7$ odčítame zo štatistickej tabuľky

$$u_{AF} = \frac{s(n)}{\sqrt{n-1}} = \frac{0,08}{\sqrt{7-1}} = 0,0326 \text{ N}.$$

Štandardnú neistotu typu B vypočítame pomocou vzťahu (2.6), kde $F_{\max} = 0,01$ N (vyplýva to z tab. 18, kde max. a min. hodnota sily je daná s takouto presnosťou)

$$u_{BF} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,0057 \text{ N}.$$

Kombinovaná štandardná neistota bude daná

$$u_{c\bar{F}} = \sqrt{u_{A\bar{F}}^2 + u_{B\bar{F}}^2} = \sqrt{0,0326^2 + 0,0057^2} = 0,03309 \text{ N.}$$

Relatívna štandardná neistota sa vypočíta podľa vzťahu (2.16) v tvare $u_{r\bar{F}} = \frac{u_{c\bar{F}}}{\bar{F}} 100\%$, kde výberový priemer pružnej sily je 0,24 N. Potom $u_{r\bar{F}} = \frac{0,03309}{0,24} 100\% = 13,78\%$.

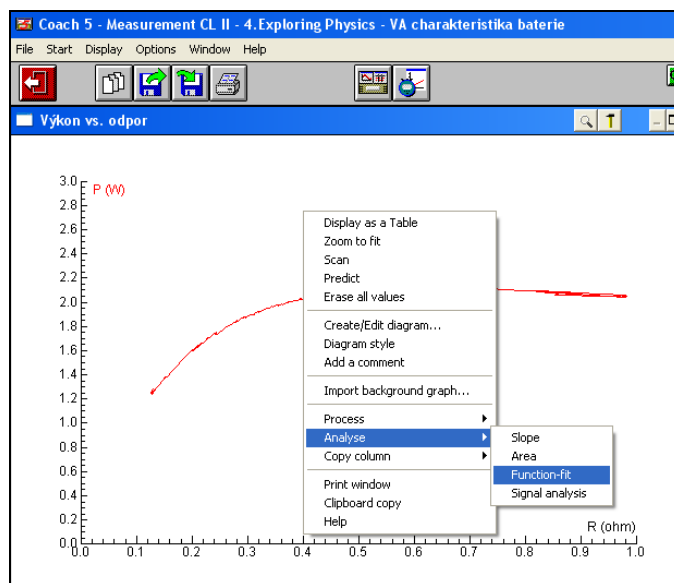
Všetky výsledky zaokrúhlime na prvú platnú číslicu:

pre $u_{c\bar{F}} = 0,03309 \text{ N}$ je prvá platná číslica **3**, za ňou je 3, potom jej hodnotu zaokrúhlime nahor $u_{c\bar{F}} = 0,04 \text{ N}$. Pre zaokrúhlenie relatívnej štandardnej neistoty platí rovnaký postup, potom $u_{r\bar{F}} = 20\%$. Hodnotu nameranej veličiny, v tomto prípade výberový priemer pružnej sily, zaokrúhlime na rovnaký počet desatinných miest ako je zaokrúhlená absolútna štandardná neistota; $\bar{F} = 0,24 \text{ N}$.

Správny zápis výsledku: $\bar{F} = (0,24 \pm 0,04)\text{N}$, $u_{r\bar{F}} = 20\%$

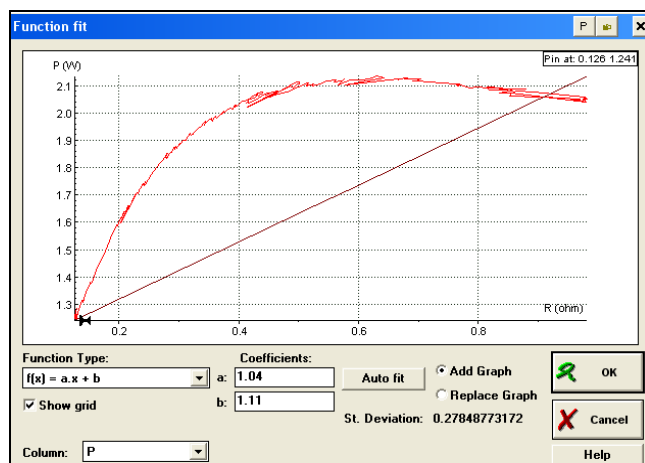
Medzi ďalšie úpravy grafu patrí fitovanie (vedenie regresnej krivky), derivácia grafu (získanie hodnôt v extrémoch odmeranej funkčnej závislosti) a prezeranie grafu, ktoré umožňuje odčítať z grafu hodnotu v ľubovoľnom bode.

Fitovanie grafu uskutočníme tak, že klikneme pravým tlačidlom na myši v okne grafu, vyberieme funkciu Analyse (Analýza) a zvolíme možnosť *Function-fit (Fitovanie funkciou)* (obr. 45).

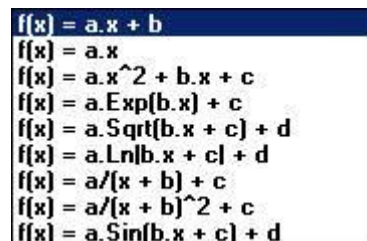


Obr. 45

V okne Function fit (obr. 46) zvolíme *Typ funkcie (Function type)*, ktorou budeme graf fitovať (obr. 47) a stlačíme tlačidlo **Auto fit** (obr. 46).



Obr. 46



Obr. 47

Začne automatický výpočet parametrov fitovacej funkcie a samotné fitovanie. Tento proces trvá niekoľko sekúnd, podľa zložitosti odmeranej funkčnej závislosti. Po skončení fitovania sa zobrazia v okne Function fit (obr. 46) vypočítané hodnoty parametrov a , b , ... fitovacej funkcie a cez namerané hodnoty je vedená regresná krivka.



Ak proces fitovania po určitom čase neskončí, dá sa ukončiť pomocou tlačidla Esc na klávesnici počítača.

Pomocou koeficientov a , b , ... môžeme zadať štartovacie hodnoty parametrov fitovacej funkcie.

Napríklad: Odmeraná závislosť má priebeh $T = b - at$, podľa ktorej teplota so zväčšujúcim časom lineárne klesá. V ponuke typov grafov na fitovanie je možnosť lineárnej funkcie $y = ax + b$. Funkcia na fitovanie lineárne narastá, čo je aj graficky zobrazené v okne pre fitovanie. Zmenu na požadovanú funkciu dosiahneme tak, že zmeníme číselnú hodnotu parametra a na zápornú (pred číslom pri parametri a v okienku na [obr. 46](#) napíšeme znamienko mínus). Zmena sa zobrazí na grafe, fitovacia funkcia bude klesajúcou funkciou. Po tejto úprave dáme graf fitovať.

Príklad 20: Zvoľte vhodné funkcie na fitovanie a upravte ich pomocou hodnôt parametrov a , b , c , ..., pre nasledovné namerané dáta:

a) pri izobarickom deji súbor odmeraných hodnôt objemu od meniaceho sa tlaku bol daný stavovou rovnicou v tvare $V = \frac{nRT}{p}$, kde R , p , n sú konštanty pre daný plyn,

b) pri vybíjaní kondenzátora pomocou rezistora s odporom R sa napätie kondenzátora menilo s časom podľa vzťahu $U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

a) Pri izobarickom deji je konštantný tlak, R je molárna plynová konštanta a n je počet mólov, ktorý sa pri meraní nemení. Potom stavovú rovnicu upravíme na tvar $V = aT$, kde $a = \frac{nR}{p}$.

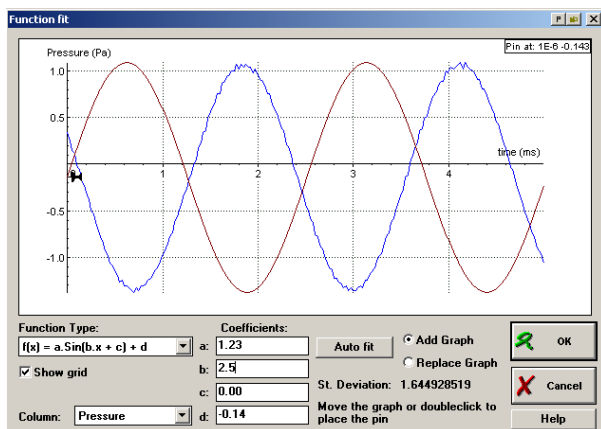
Na fitovanie vyberieme lineárnu funkciu $y = ax$, kde $y = V$ a $x = T$.

b) Napätie kondenzátora sa pri vybíjaní mení exponenciálne s časom podľa vzťahu $U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, kde U_0 je napätie v čase t_0 , R je odpor rezistora a C je kapacita kondenzátora. Tieto veličiny zostávajú počas merania nemenné. Potom funkčný predpis pre fitováciu funkciu má tvar $y = ae^{-bx}$. Softvér Coach 5 ponúka na fitovanie funkciu v tvare $y = ae^{bx} + c$. Aby táto funkcia spĺňala naše požiadavky upravíme ju pomocou parametrov, ktoré zvolíme: $c = 0$, b zmeníme na zápornú hodnotu, parameter a nezmeníme.

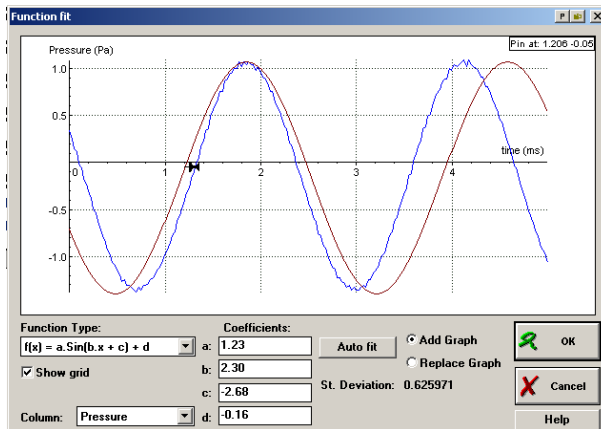
a) Graf budeme fitovať funkciou v tvare $y = ax$. Hodnotu koeficientu a nemusíme meniť.

b) Fitovacia funkcia bude mať tvar $y = ae^{bx}$, kde $c = 0$, $b < 0$.

Niekedy je fitovacia funkcia posunutá oproti nameranej funkcii. Posunúť ju môžeme pomocou malej ikony ruky, ktorá sa objaví pri fitovacej funkcii v okne Function fit (obr. 48). Opravu je možné vidieť na obr. 49. Posun fitovacej funkcie sa prejaví aj na hodnotách parametrov.



Obr. 48



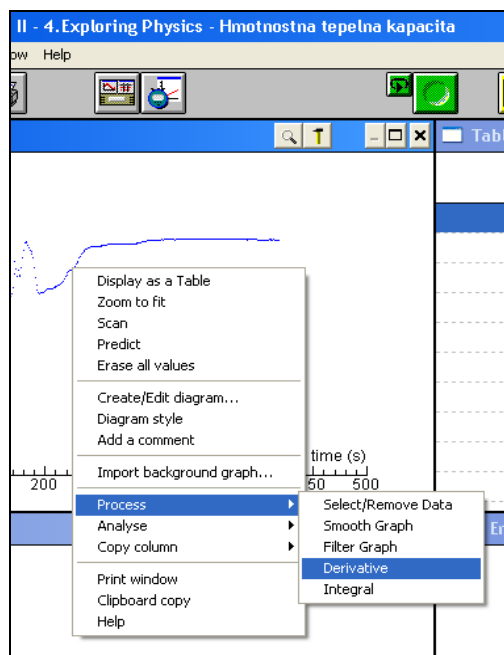
Obr. 49

Po fitovaní grafu sú pre experimentátora zaujímavé hodnoty parametrov a , b , ... a hodnota štandardnej odchýlky *St. deviation*, ktoré sú potrebné na ďalšie spracovanie nameraných dát. Ak chceme, aby sa fit grafu zobrazoval v grafe odmeraných hodnôt, stlačíme **OK**, ak nie, stlačíme **Cancel**.



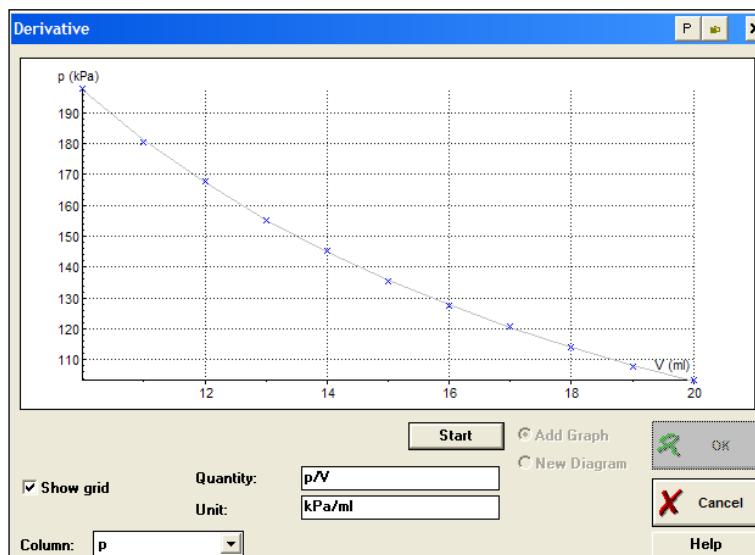
Štandardná odchýlka (St. deviation) je daná číselnou hodnotou, ktorá predstavuje odchýlku fitu od pôvodných dát. Čím je jej číselná hodnota nižšia, tým je presnejší výsledok fitovania.

Pri **derivovaní grafu** klikneme pravým tlačidlom myši v okne grafu, vyberieme funkciu Process (Spracovanie) a zvolíme možnosť *Derivative (Derivácia)* (obr. 50).



Obr. 50

V okne Derivative (obr. 51) zvolíme *Start* (Štart) pre spustenie derivácie, ktorá prebieha niekoľko sekúnd. Po ukončení derivácie, sa v príslušnom okne objaví derivácia grafu odmeraných hodnôt.



Obr. 51

Pre zobrazenie derivácie grafu môžeme zvoliť dve možnosti:

1. *Add graph (Pridanie grafu)* - derivácia grafu bude zobrazená v tom istom grafe, ktorý bol derivovaný a zvýraznený inou farbou. Os odpovedajúca hodnotám derivácie sa zobrazí na

pravej strane grafu. Ak chceme deriváciu grafu umiestniť do tohto grafu stlačíme **OK**, ak nie stlačíme **Cancel**.

2. New Diagram (Nový diagram) – derivácia grafu sa zobrazí v novom grafe. Po stlačení **OK**, sa kurzor zmení na tvar malého diagramu, ktorý môžeme umiestniť do zvoleného okna (stačí kliknúť ľavým tlačidlom myši do voľného okna).

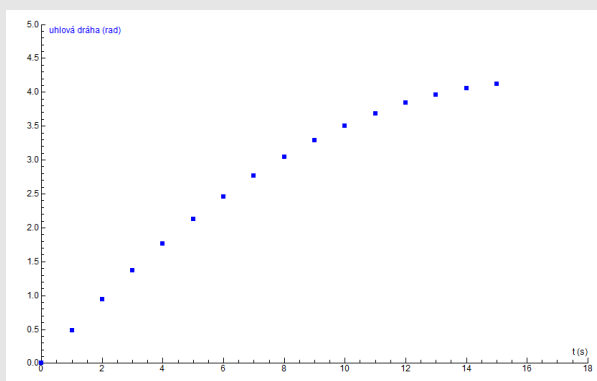


Pomocou derivácie určujeme obvykle extrémny funkcie, preto sa pri vykresľovaní derivácie zobrazuje aj vodorovná čiara prechádzajúca hodnotou nula na osi príslušnej derivácie.

Podobným spôsobom by sme integrovali graf.

Príklad 21: Z nameranej grafickej závislosti uhlovej dráhy od času (obr. 52) rovnomerne spomaleného otáčavého pohybu rotačnej aparatury určte hodnoty počiatočnej uhlovej rýchlosti, počiatočnej uhlovej dráhy a uhlového zrýchlenia. Pomocou derivácie funkcie zostrojte graf uhlovej rýchlosti od času.

Pri určení hodnôt počiatočnej uhlovej rýchlosti, počiatočnej uhlovej dráhy a uhlového zrýchlenia použijeme analýzu grafu (fitovanie).

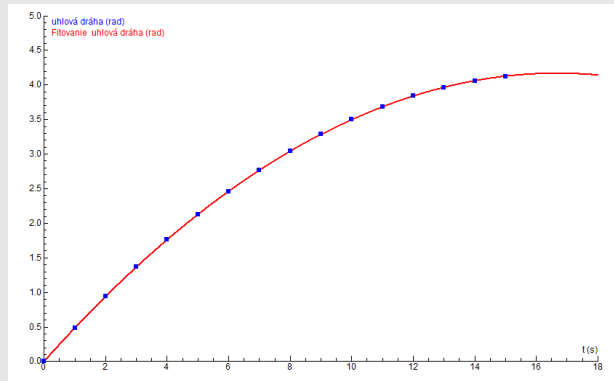


Obr. 52

Teoretická závislosť popisujúca uhlovú dráhu rovnomerne spomaleného otáčavého pohybu

rotačnej aparatury na obr. 52 je daná rovnicou $\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 + \varphi_0$ (1).

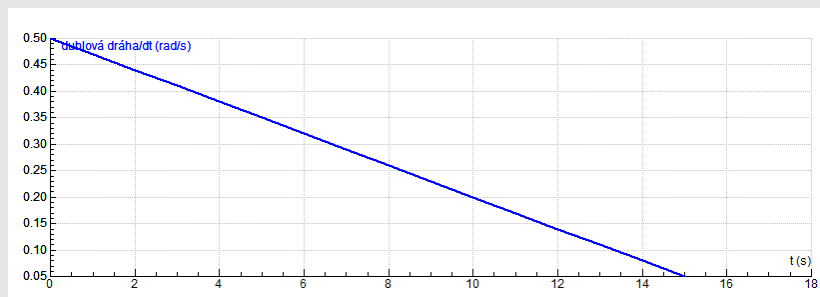
Na fitovanie vyberieme mocninovú funkciu v tvare $f(x) = ax^2 + bx + c$ (2) (viď. [obr. 47](#)) a sfitujeme podľa [postupu](#) pre fitovanie grafu. Funkcia s fitom je zobrazená na obr. 53.



Obr. 53

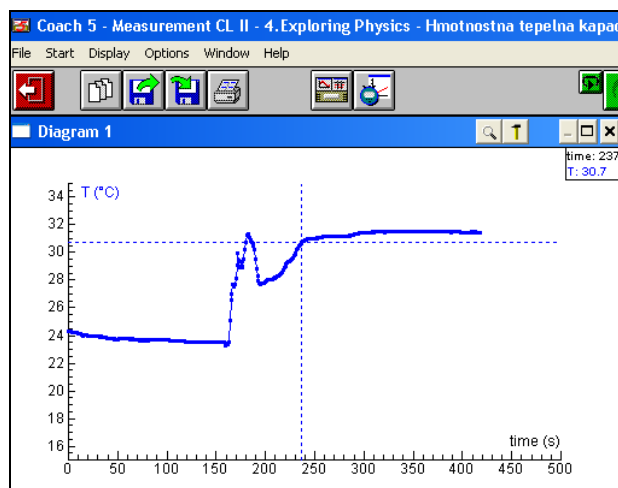
Parametre fitu sú $a = -0,015$, $b = 0,5$, $c = 0$. Porovnaním teoretického vzťahu (1) s predpisom fitovacej funkcie (2) pre parametre fitu platí $a = \frac{1}{2}\alpha$, $b = \omega_0$, $c = \varphi_0$. Potom uhlové zrýchlenie je dané $\alpha = 2a = 2 \cdot (-0,015) = -0,03 \text{ s}^{-2}$, uhlová rýchlosť je $b = \omega_0 = 0,5 \text{ s}^{-1}$ a počiatočná uhlová dráha je $c = \varphi_0 = 0 \text{ rad}$.

Z teórie vyplýva, že $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, preto pri zostrojení grafickej závislosti uhlovej rýchlosti od času môžeme odmeranú závislosť derivovať podľa času podľa naznačeného postupu pre [derivovanie](#) funkcie. Graf uhlovej rýchlosti od času získaný derivovaním grafu na obr. 52 je zobrazený na obr. 54.



Obr. 54

Pri **prezeraní grafu** klikneme pravým tlačidlom myši v okne grafu a vyberieme funkciu Scan (Prezeranie) ([obr. 50](#)). Po odkliknutí sa objavia na grafe dve čiarkované priamky, ktoré sú na seba kolmé, ktorými možno posúvať ľavým tlačidlom myši alebo pomocou šípok na klávesnici počítača ([obr. 55](#)). Pre ukončenie prezerania grafu sa z tej istej ponuky na grafe zvolí možnosť Stop scanning.



Obr. 55



Pri prezeraní grafu sa v okienku vpravo hore zobrazujú hodnoty vynesené na vodorovnú a zvislú os grafu, ktoré pri posúvaní čiarkovaných priamok prezeráme (napr. na obr. 52, v čase $t = 237$ s je teplota $T = 30,7$ °C).

Na [obr. 50](#) sú ďalšie možnosti úprav grafu. Je to zväčšenie grafu resp. Zoom (Priblíženie) (alebo znak lupy na lište okna grafu). Možnosť Erase all values umožní zmazať všetky odmerané hodnoty v grafe. Pomocou funkcie Predict (Predpoveď) môžeme nakresliť predpoveď grafickej závislosti odmeraných hodnôt skôr, ako začneme merať, a po odmeraní porovnať so skutočnou grafickou závislosťou.

Kopírovanie okna grafu a tabuľky

Graf kopírujeme tak, že klikneme pravým tlačidlom myši priamo na graf na ktorom sa objaví ponuka ([obr. 50](#)), z ktorej vyberieme Clipboard copy (Kopírovať obrazovku okna). Pri kopírovaní tabuľky postupujeme rovnako, najprv ale označíme všetky riadky tabuľky pomocou myši a potom kopírujeme. Takto nakopírované okno pomocou Ctrl V vložíme do programu Word alebo Excel a upravíme. Vo wordovskom súbore použijeme na úpravu tabuľky nasledujúci postup: označíme celú tabuľku pomocou myši, zvolíme v hornej lište Vložiť tabuľku a vyberieme možnosť *Tabuľka*.



Preskúšajte sa – 4.2

1. Pomocou nasledujúcej štatistickej tabuľky určte
 - a) pre uhlovú dráhu φ nasledujúce veličiny: maximálnu hodnotu, výberový priemer, sumu, sumu všetkých hodnôt na druhú,
 - b) pre čas: n , $s(n)$, t_{\max} , $u_{A\bar{t}}$, u_{Bt} .

	t	φ
	s	rad
Number:	16	16
Max:	15	4,13
Min:	0	0,00
Average:	8	2,59
Sum:	120	41,40
Sum sqr:	1240	134,12
s(n):	5	1,30
s(n-1):	5	1,34

Tab. 19

2. Pomocou výsledkov z [príkladu 19](#) vypočítajte absolútnu a relatívnu štandardnú neistotu
 - a) výberového priemeru okamžitej výchylky x ,
 - b) výberového priemeru tuhosti pružiny, ak pre pružnú silu platí $F = kx$,
 - c) zapíšte správne výsledok merania pre oba výpočty. [Výsledky](#)
3. Otvorte si v Coachi súbor s názvom Cvičný, ktorý obsahuje dve odmerané závislosti $p = f(V)$, $p = f(1/V)$ pre izotermický dej. Teoreticky predpovedaná funkčná závislosť popisujúca tento dej je daná $pV = NkT$, kde N , k , T sú konštanty.
 - a) Do grafu $p = f(V)$ nakreslite predpoveď fitovacej krivky. Navrhните hodnoty parametrov fitovacej funkcie a graf potom fitujte vhodnou funkciou. Bola vaša predpoveď správna? Opíšte parametre fitu a štandardnú odchýlku.
 - b) Zmažte predpoveď v grafe a graf skopírujte do wordu.
 - c) Uložte graf $p = f(V)$ ako tabuľku v Coachi a skopírujte ju do wordu. Zmažte fit v grafe.
 - d) Fitujte graf $p = f(1/V)$ vhodnou funkciou. Opíšte parametre fitu a štandardnú odchýlku. Graf skopírujte do wordu.
 - e) V grafe $p = f(1/V)$ určte pomocou Scanu hodnotu tlaku v bode s objemom 20 ml. Priblížte si graf.
 - f) Z tabuľky nameraných hodnôt získajte štatistickú tabuľku, uložte ju do wordu. Zo štatistickej tabuľky určte nasledovné hodnoty: počet meraní, výberový priemer termodynamickéj teploty, odchýlku od n hodnôt pre $p*V$, súčet

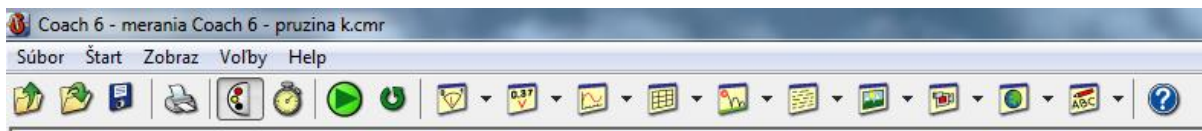
4.3 Softvér Coach 6

Existuje aj novšia verzia programu Coach, ktorú používame na niektorých počítačoch, preto stručne popíšme rozdiely novšej verzie oproti Coachu 5.

Program Coach 6 je v slovenskom jazyku. Líši sa od staršej verzie novým dizajnom hlavného okna programu (obr. 56) a tlačidiel (obr. 57) ako aj niektorými funkciami. Je možné v danom projekte (aktivite) zvoliť viac okien na dáta - graf, tabuľka, displej meradla a iné (Obr. 59).

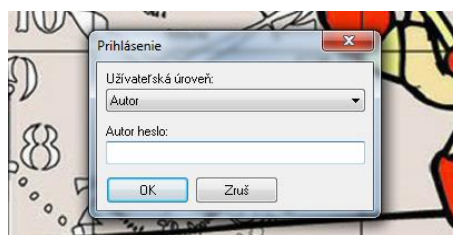


Obr. 56





Obr. 57

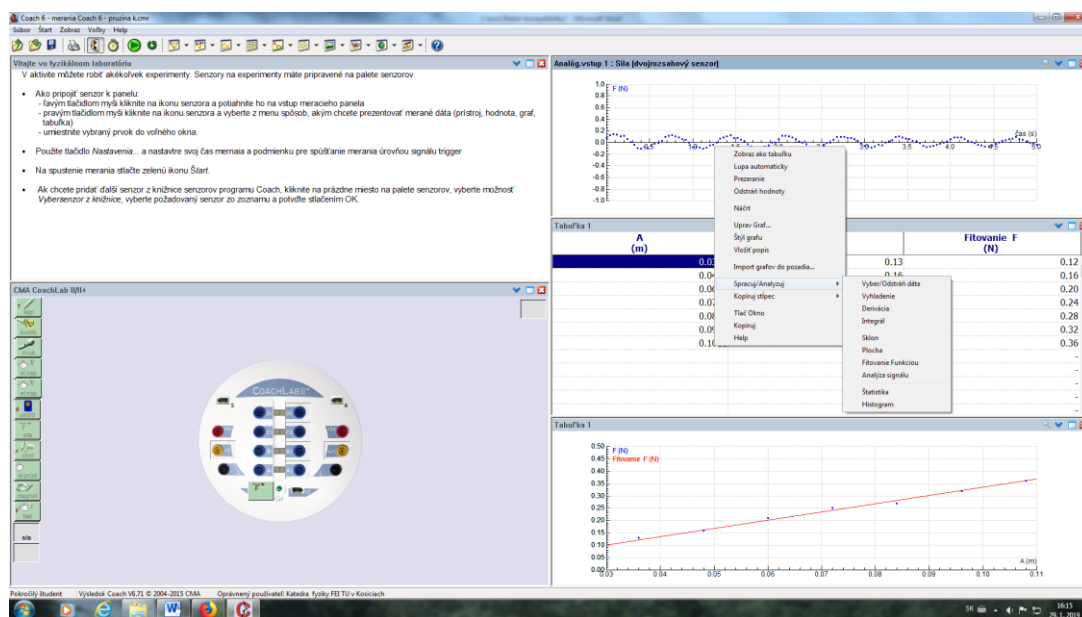
Program sa otvára kliknutím na ikonu Autor na obrazovke, potom sa zvolí Užívateľská úroveň *Pokročilý študent* a potvrdí OK.



Obr. 58

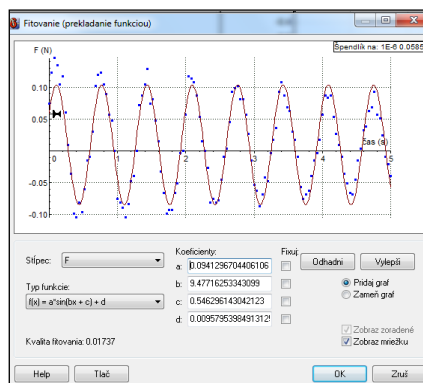
Pri meraní na zapnutie merania používame ikonu  , na ktorú klikáme aj v prípade opakovaného merania. Toto tlačidlo nezmení farbu na červenú ako to bolo v staršej verzii. Počas merania k nemu pribudne nové tlačidlo **Stop**, ktorým meranie zastavujeme. Parametre merania sa nastavujú v hornej lište kliknutím na tlačidlo  .

Všetky úpravy v tabuľke aj grafe robíme rovnako ako to bolo v Coachi 5, okrem štatistiky, ktorú získame pri úprave grafu a aj pri úprave tabuľky, v možnosti *Spracuj/Analyzuj* (obr. 59).



Obr. 59

Nová verzia Coachu má pridané možnosti k skvalitneniu fitovania funkciou. Oproti pôvodnej verzii ponúka možnosť zlepšenia fitu – možnosť *Vylepši*, fixovanie jednotlivých parametrov fitovacej funkcie (obr. 60) ako aj viac typov funkcií na fitovanie.



Obr. 60

5 Meracie prístroje

Aká je presnosť merania digitálneho voltmetra? Ako sa meria pomocou mikrometra?



Základné pojmy:

pásmové meradlo, posuvné meradlo, mikrometer, váhy, stopky, teplomer, pyrometer, voltmeter, ampérmeter

V tejto kapitole sa oboznámime s niektorými základnými meracími prístrojmi, ktoré budeme pri meraní používať. Pôjde o meradlá digitálne, elektrické ručičkové (analogové), ale aj mechanické. Pomocou nich budeme merať dĺžku a priemer telies, elektrický prúd a napätie, teplotu prostredia, ale aj dobu, za ktorú teleso kmitá a podobne.

5.1 Meradlá dĺžky

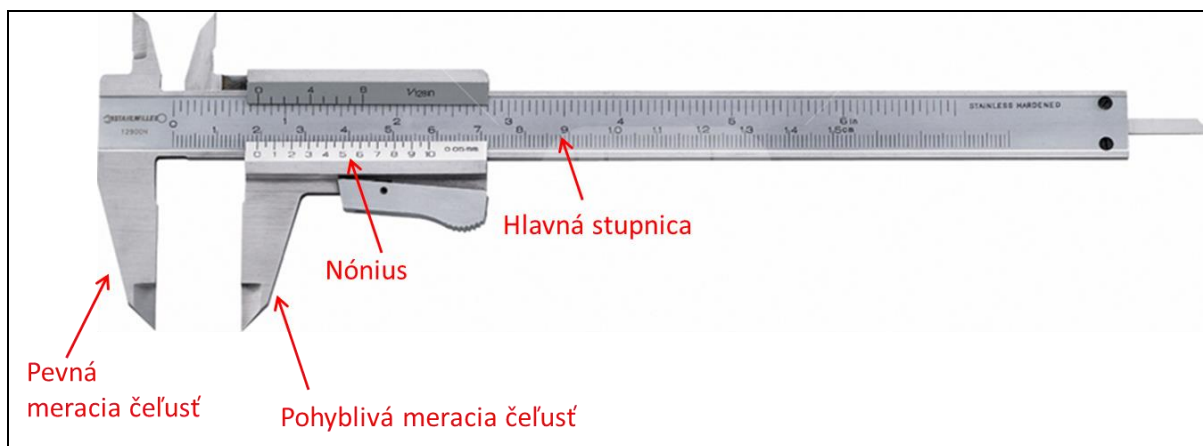
5.1.1 Pásmové a posuvné meradlo

Pásmové meradlo slúži na meranie dĺžok (obr. 61). Stupnica pásmového meradla je delená na milimetre. Presnosť pásmového meradla je daná hodnotou najmenšieho dielika.



Obr. 61

Posuvné meradlo používame na určenie dĺžok, vonkajších a vnútorných rozmerov alebo hĺbky. Posuvné meradlo pozostáva z pevnej časti s hlavnou milimetrovou stupnicou a pevnou čeľusťou a pohyblivej časti s čeľusťou a nóniovou stupnicou (obr. 62) (pozri aj obrázok na <http://web.tuke.sk/smetrologia/prospekty/posuvka-sch.jpg>).

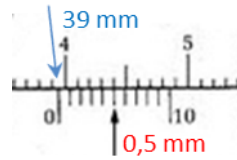


Obr. 62

Delenie nónia (pomocnej stupnice) môže byť na 1/10, 1/20 alebo 1/50. Pri delení na desatiny má dĺžkový nónius stupnicu rozdelenú na 10 rovnakých dielikov. Analogicky je to pri ďalších deleniach. Pri meraní posuvným meradlom, vložíme teleso medzi meracie plochy. Na pomocnej stupnici sledujeme polohu začiatkovej nóniovej rysky (nuly), ktorá ukazuje na hlavnej stupnici počet celých milimetrov. Potom na pomocnej stupnici nónia hľadáme prvý dielik rysky nónia, ktorý je totožný s niektorým dielikom hlavnej stupnice. Tento dielik

označuje počet desiatín milimetra (pri delení nónia na 1/10) alebo počet stotín milimetra (pre delenie na 1/20 a 1/50). Výsledná hodnota merania je daná súčtom milimetrov na hlavnej stupnici a desiatín (stotín) milimetra na nóniovej stupnici.

Napríklad: Na detaile posúvneho meradla s delením nónia na 1/10 mm na obrázku, je



poloha začiatkovej nóniovej rysky (nula) za hodnotou 3,9 (39 mm) na hlavnej stupnici. Na stupnici nónia sa prekrýva v poradí 5 dielik (medzi dielikmi hodnoty 0 a 10 na nóniu) s hodnotou dielika 4 (40 mm) na hlavnej stupnici, čo prislúcha hodnote 0,5 mm na nóniovej stupnici. Výsledná číselná hodnota je daná súčtom $39 \text{ mm} + 0,5 \text{ mm} = 39,5 \text{ mm}$.

Napríklad: Pri meraní vonkajších rozmerov telesa pomocou posúvneho meradla s delením nónia na 1/20 mm (detail na obrázku <http://web.tuke.sk/smetrologia/prospekty/posuvka-sch.jpg>), poloha začiatkovej nóniovej rysky (nula) je totožná s hodnotou 2 (20 mm) na hlavnej stupnici. Na stupnici nónia sa prekrýva v poradí 5 dielik (medzi dielikmi hodnoty 2 a 3 na nóniu) s hodnotou dielika 3 (30 mm) na hlavnej stupnici, čo prislúcha hodnote 0,25 mm na nóniovej stupnici. Výsledná číselná hodnota vonkajších rozmerov telesa je daná súčtom $20 \text{ mm} + 0,25 \text{ mm} = 20,25 \text{ mm}$.



Pozrite sa aj na animáciu ako merat' s posuvným meradlom, zdroj:

<http://web.tuke.sk/smetrologia/prospekty/posuvka-anim.gif>

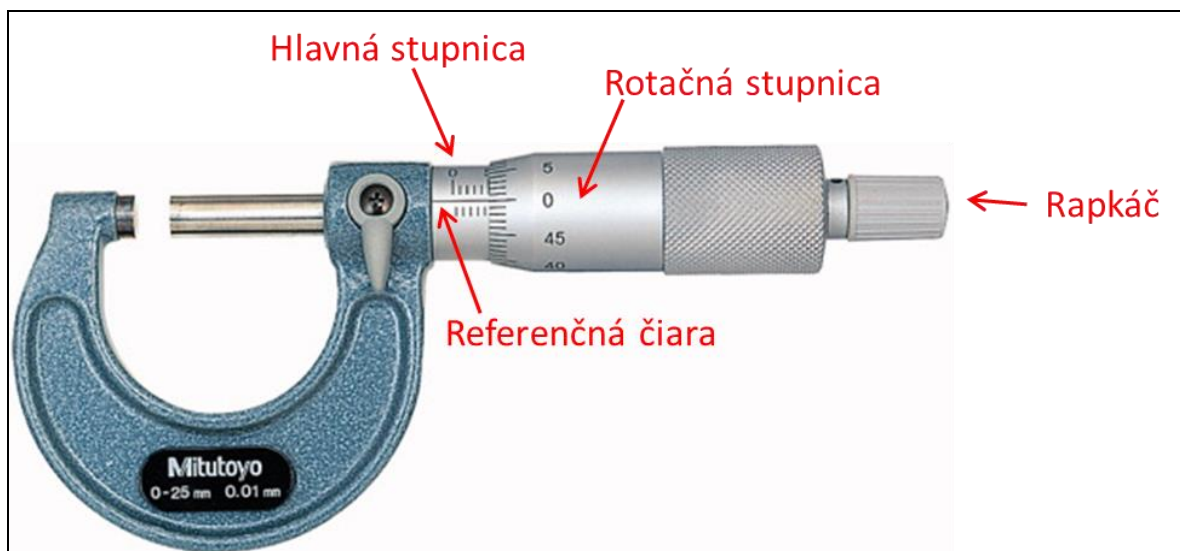
Presnosť posúvneho meradla určujeme ako hodnotu najmenšieho dielika.

Z histórie

Princíp odčítania nameranej hodnoty v medzipolohách využívajúci nónius vynášiel v roku 1631 francúzsky matematik Pierre Vernier. Táto stupnica sa v určitých jazykoch nazýva aj *Vernierova* po tomto vynálezcovi, no vo väčšine krajín sa zaviedol pojem *nóniová*. Nónius je latinské meno portugalského astronóma a matematika Pedra Nunesa. Ten v roku 1542 vynášiel mierne odlišný spôsob získavania nameraných hodnôt, ktorý bol predchodcom dnešnej nóniovej stupnice.

5.1.2 Mikrometer

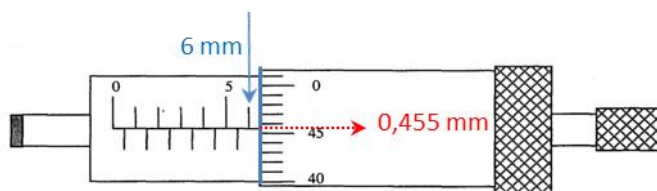
Mikrometer je meradlo dĺžok, ktoré využíva pri meraní presnú skrutku s malým stúpaním závitú, tzv. mikrometrickú skrutku, ktorá určuje polohu meracích plôch. Vďaka tomuto princípu merania je mikrometer presnejšie meradlo ako posuvné meradlo. Mikrometer má dve stupnice (obr. 63) (pozri aj obrázok na <http://web.tuke.sk/smetrologia/prospekty/mikrometer-sch.jpg>). Hlavná milimetrová stupnica je delená na hlavné milimetrové dieliky nad referenčnou čiarou, pod ktorou je každý dielik rozdelený na polovicu. Druhá, rotačná stupnica, sa nachádza po obvode bubienka a zvyčajne je delená na 50 dielikov. Väčšina mikrometrov má rapkáč, ktorý slúži na vyvolanie vhodnej meracej sily. Pri natáčaní bubienka bez rapkáča môže dôjsť k deformácii meraného telesa medzi meracími plochami, prípadne aj k deformácii meradla, čo môže ovplyvniť výsledok merania. Rapkáč je v podstate spojka, ktorá pri pôsobení väčšieho tlaku než je dovolený začne preklzovať.



Obr. 63

Pri meraní na mikrometri, najprv odčítame hodnotu celých dielikov z milimetrovej stupnice nad referenčnou čiarou, ktorá je na odkrytej časti stupnice až po bubienok. K nej pripočítame hodnotu polovičných dielikov pod referenčnou čiarou. Potom sa pozeráme na stupnicu na bubienku, na ktorej hľadáme dielik na stupnici bubienka, ktorý sa prekrýva s referenčnou čiarou. Výsledná hodnota merania bude daná súčtom celých dielikov na milimetrovej stupnici, polovičných dielikov na milimetrovej stupnici a stotín milimetra na bubienku.

Napríklad: Na obrázku mikrometra v hornej časti posledná hodnota na milimetrovej stupnici



nezakrytá bubienkom je 6 celých dielikov, teda 6 mm. Referenčná čiara na mikrometri sa prekrýva s dielikom 45,5 na bubienku, čo je 0,445 mm. Celková hodnota merania bude daná súčtom $6 + 0,445 = 6,445$ mm.

Napríklad: Na obrázku <http://web.tuke.sk/smetrologia/prospekty/mikrometer-sch.jpg>, v hornej časti posledná hodnota na milimetrovej stupnici nezakrytá bubienkom je 15 celých dielikov, teda 15 mm. Referenčná čiara na mikrometri sa prekrýva s dielikom 5 na bubienku, čo je 0,05 mm. Celková hodnota merania bude daná súčtom $15 + 0,05 = 15,05$ mm.

Presnosť mikrometra určujeme ako hodnotu najmenšieho dielika.



Pozrite sa aj na animáciu ako merať s posuvným meradlom, zdroj:

<http://web.tuke.sk/smetrologia/prospekty/mikrometer-anim.swf>

Z histórie

Mikrometer pochádza zo 17. storočia. Anglický astronóm, matematik a konštruktér vedeckých prístrojov William Gascoigne objavil mikrometrickú skrutku ako náhradu nónia, ktorá mu mala pomôcť pri jeho štúdiu hviezd. Skutočným otcom dnešného mikrometra je francúz Jean Louis Palmer, ktorý dokázal že mikrometer môže byť použitý pri presnom meraní rozmerov.

5.2 Meradlá času - stopky

Stopkami určujeme dobu, za ktorú teleso napr. vykoná určitý počet kmitov alebo prejde určitú dráhu. Digitálne stopky, ktoré používame pri meraní, ovládame pomocou dvoch tlačidiel. Tlačidlom **Start Stop** vpravo hore (obr. 64) spúšťame a zastavujeme dobu merania. Časový údaj na stopkách nulujeme tlačidlom **Reset** (vľavo hore). Čas na displeji stopiek je

zobrazovaný vo formáte (0:00 00 – minúty : sekundy stotiny sekundy). Preto pri odčítavaní časového údajá zo stopiek je nutné premeniť čas v minútach na sekundy.

Napríklad: Stopkami bola odmeraná doba 50 kmitov jednoduchého kyvadla 1:48 06, t. j. 1 minúta, 48 sekúnd a 6 stotín sekundy. Potom celková doba určená v sekundách je $60 + 48,06 = 108,06$ sekúnd.



Obr. 64

Presnosť stopiek je určená ako hodnota najmenšieho dielika na stupnici.



Nezabudnite pri meraní stopkami brať do úvahy osobnú chybu, ktorá je spôsobená oneskorenou reakciou experimentátora pri zapnutí a vypnutí stopiek. Tá predstavuje chybu približne 0,1 s na jedno stlačenie tlačidla stopiek.

5.3 Meradlá hmotnosti

V našom laboratóriu používame na určenie hmotnosti telies váhy OWA LABOR 750.05, ktoré pozostávajú z misky a stupnice (obr. 65).



Obr. 65



Obr. 66

Váhy uvádzame do prevádzky zapnutím vypínača v zadnej časti váh (obr. 66). Hodnotu hmotnosti zobrazuje svetelná stopa na displeji stupnice váh (obr. 67), na ktorom pred meraním skontrolujeme nulovú hodnotu (čierna ryska sa musí prekryvať s nulovou hodnotu na váhach).



Obr. 67



Obr. 68

Ak je stupnica na displeji rozmazaná, zaostríme ju pomocou kolieska 1 v zadnej časti váh (obr. 66). Potom môžeme začať merať.

Pri určovaní hmotnosti telesa položíme teleso na misku váh a odčítame jeho hmotnosť zo stupnice. Stupnica na obr. 67 ukazuje hmotnosť telesa do 100 g (napr. 38,5 g).



Obr. 69



Obr. 70

Ak na stupnici nie je zobrazená číselná hodnota (displej zobrazuje znamienko plus alebo mínus) (obr. 69), znamená to, že teleso je ťažšie (pre znamienko +) alebo ľahšie (pre znamienko -) ako 100 g. Potom teleso zložíme z váh a vyvážíme ho potrebným celočíselným násobkom 100 g pomocou kolieska 3 na obr. 68. V okienku vedľa stupnice (obr. 70) sa objaví číslo, ktoré odpovedá n - násobku 100 g (napr. číslo 2 znamená, že sme pridali hmotnosť 200 g).

Napríklad: Ak vážime teleso, ktoré váži 538 g, tak pomocou kolieska 3, nastavíme v okienku vedľa stupnice číslo 5. Potom k odčítanej hodnote 38 g na stupnici pripočítame 500 g.

Po meraní vážené teleso zložíme z váh, vrátíme pomocou kolieska 3 číslo v okienku vedľa stupnice na 0 a vypneme váhy. Presnosť váh je uvedená na váhach, $d = 0,1 \text{ g}$. Maximálna hmotnosť, ktorú môžeme na týchto váhach odvážiť je 1000 g.

5.4 Meradlá teploty

5.4.1 Teplomer

Na určovanie teploty používame rôzne teplomery, najčastejšie s digitálnym displejom (obr. 71).



Obr. 71

Pri meraniach podporovaných počítačom meriame pomocou teplotných sond, ktoré umožňujú merať teplotu v rôznych rozsahoch teplôt. Presnosť teplomerov je daná hodnotou ich najmenšieho dieliky na stupnici.

5.4.2 Pyrometer

Na meranie vysokých teplôt slúžia radiačné teplomery – optické pyrometre (obr. 72), ktoré sú založené na zákonoch tepelného žiarenia absolútne čierneho telesa. Bežne používané typy možno použiť na meranie teplôt do 3500°C .

Merací systém pyrometra je tvorený voltmetrom s otočnou cievkou z rozsahom 1,5 V a prúdovou spotrebou 5 mA. Voltmeter je paralelne pripojený k pyrometrickej žiarovke, ktorá sa nachádza v ohniskovej rovine ďalekohľadu.



Obr. 72

Pri meraní pozorujeme ďalekohľadom svetlo vychádzajúce zo žiariča (napr. zo žiarovky) a regulujeme otočnou cievkou pri súčasnom stlačení tlačidla 1 na obr. 72 žeraviaci prúd žiarovky pyrometra tak, aby farba vlákna žiarovky bola taká istá ako farba žiariča. Pre pyrometer používaný v našom laboratóriu je výrobcom určená presnosť merania $\pm 22^{\circ}\text{C}$ na rozsahu $700 - 1500^{\circ}\text{C}$ a $\pm 35^{\circ}\text{C}$ na rozsahu $1200 - 2300^{\circ}\text{C}$. Rozsahy na pyrometri meníme gombíkom 2 na obr. 72. Odhad vysokej teploty podľa farby vysielaného svetla je uvedená v tab. 20.

Teplota ($^{\circ}\text{C}$)	700	900	1100	1200	1300	1500
Farba	tmavo červená	višňovo červená	oranžová	žltá	zožltnutá biela	oslňujúca

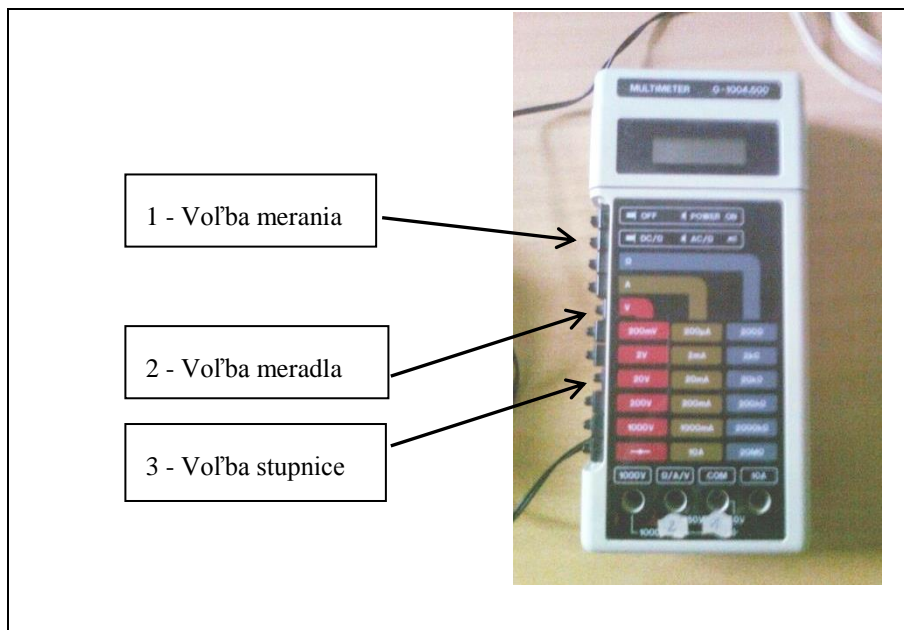
Tab. 20

5.5 Meradlá napätia, prúdu a odporu

Pri meraní napätí a prúdu používame rôzne typy voltmetrov, ampérmetrov a multimetrov, ručičkové (analógové) alebo digitálne.

Multimeter (obr. 73) sa zapína tlačidlom ON / OFF a používa sa ako voltmeter, ampérmeter alebo ohmmeter. Voľbu typu meradla zvolíme stlačením tlačidiel v ľavej časti na boku prístroja (napr. stlačíme A pre ampérmeter). Pri meraní je dôležité zvoliť správne stupnicu merania, ktorá sa na multimetri volí stlačením tlačidiel v ľavej časti zvoleného rozsahu, napr.

20 V. Výber merania jednosmerného (DC) alebo striedavého (AC) prúdu uskutočníme stlačením príslušného tlačidla.



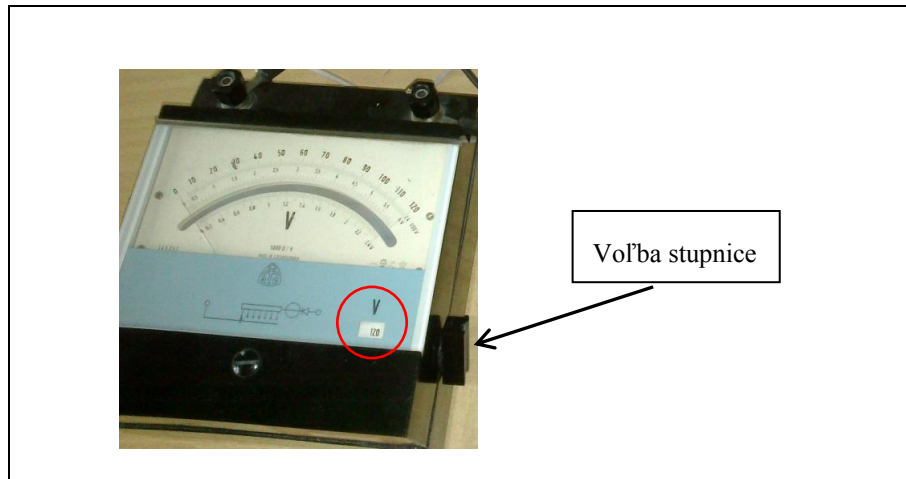
Obr. 73

Pomocou multimetra na obr. 74 je možné merať jednosmerný a striedavý prúd v rozsahu od μA po A, rovnako aj napätie v mV a V, odpor, frekvenciu a teplotu. Voľbu rozsahu a typu merania volíme otočením gombíka v strednej časti multimetra z polohy OFF do požadovanej polohy. Presnosť spomenutých multimetrov je daná ako hodnota najmenšieho dielika na stupnici displeja.



Obr. 74

Na ručičkovom voltmetri (obr. 75) alebo ampérmetri sa používa na zmenu rozsahu prepínač v pravej časti na boku prístroja. Zvolený rozsah je zobrazený v okienku (červený krúžok na obr. 75). V našom laboratóriu používame aj iné typy ručičkových voltmetrov a ampérmetrov, na ktorých sa rozsah stupnice volí podobným spôsobom.



Obr. 75

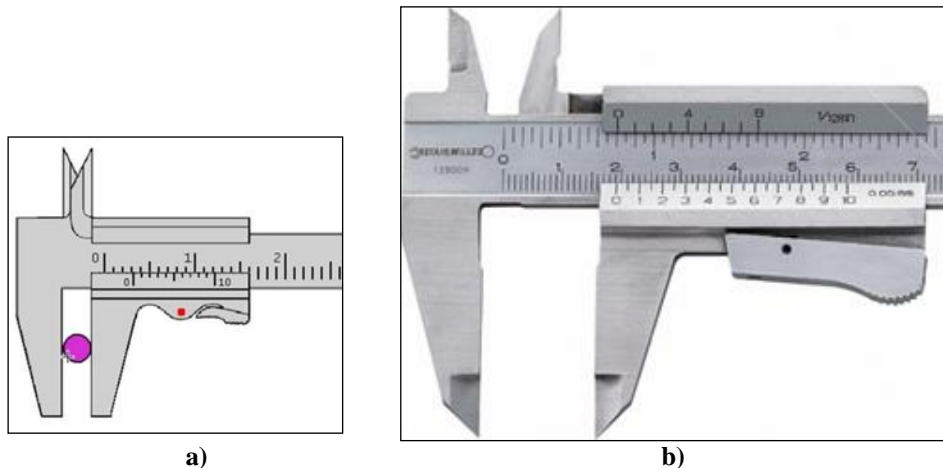
Presnosť ručičkových voltmetrov a ampérmetrov je daná triedou presnosti (p) v percentách na danom rozsahu prístroja

$$z_{\max} = \frac{p}{100} \cdot \text{rozsah}.$$



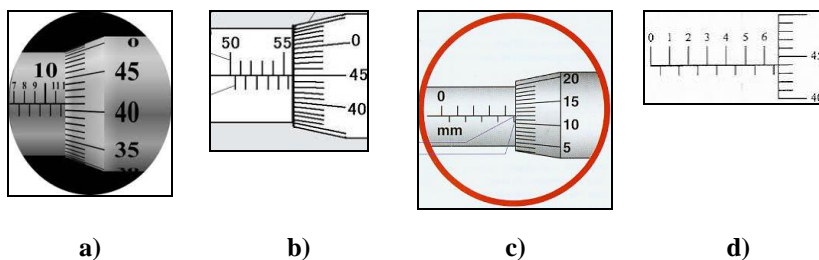
Preskúšajte sa – 5.1 – 5.5

1. Odčítajte meranú hodnotu na posuvných meradlách na obrázkoch a určte ich presnosť.



Obr. 76

2. Odčítajte hodnotu zo stupnice mikrometra na obrázkoch a určte ich presnosť.



Obr. 77

3. Určte časový okamih v sekundách zo stupnice stopiek na obrázkoch a určte ich presnosť.

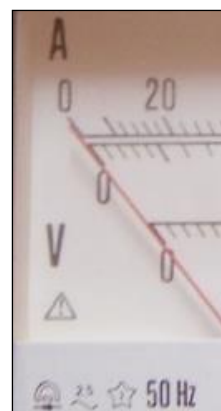


Obr. 78

4. Určte triedu presnosti prístrojov na obrázkoch.



a)



b)

Obr. 79

5. Pomocou voltmetra na obr. 79 a) bola určená hodnota napätia 75,6 V. Určte presnosť merania. Aká bude maximálna dovolená odchýlka ampérmetra na obr. 79 b) na rozsahu 30 A, na rozsahu 600 V?

[Výsledky](#)

Výsledky

Kapitola 1

Časť 1.1

- a) Dĺžka drôtu bola určená jednorazovým priamym meraním. Výsledok merania je určený dĺžkou drôtu.
 - b) Hmotnosť a strana štvorcovej dosky boli odmerané raz. Pomocou nich, podľa funkčného predpisu, bol určený moment zotrvačnosti. Je to jednorazové nepriame meranie. Výsledok merania: $I = 3,375 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 - c) Hmotnosť kovového valčeka bola určená opakovaným priamym meraním. Výsledok merania bude určený výberovým priemerom hmotnosti.
 - d) Dobu kmitu matematického kyvadla určujeme ako podiel odmeraného časového intervalu a počtu 50 kmitov, $T = t / 50$. Toto meranie bolo uskutočnené 8 - krát. Ide o nepriame opakované meranie. Výsledok merania: $\bar{T} = 2,088 \text{ s}$.
 - e) Výška hranola bola určená ako výberový priemer, ide o opakované priame meranie.
 - f) Hmotnosť vody bola určená ako rozdiel dvoch odmeraných hmotností, ktorý predstavuje výsledok merania. Pri meraní bola použitá metóda jednorazového nepriameho merania.
 - g) Teplota vody v nádobe bola určená metódou priameho opakovaného merania. Výsledok merania: $\bar{t} = 20,74 \text{ }^\circ\text{C}$.
 - h) Tuhosť pružiny bola určená jednorazovou nepriamou metódou. Výsledok merania:
$$k = \frac{F}{x} = 0,3 \text{ N/m}$$
 - i) Pri určovaní pôsobiacej sily na vozíček sa hodnoty hmotnosti a zrýchlenia odmerali niekoľkokrát, z nich sa určil výberový priemer, ktorý sa použil na určenie výslednej sily. Bola použitá metóda opakovaného nepriameho merania. Výsledok merania
 $\bar{F} = \bar{m} \bar{a} = 0,994 \text{ N}$ [Späť](#)
2. Správna odpoveď b).
3. Správna odpoveď a).
4. Správna odpoveď a).
5. Správna odpoveď c).
6. Správne odpovede:
porovnávacia metóda - b, absolútna metóda - d, statická metóda - a. [Späť](#)

Kapitola 2

Časť 2.1

- Meranie je zaťažené hrubou chybou, výrazne sa líši štvrtá odmeraná hodnota 1,3 s.
 - Pri meraní molárnej plynovej konštanty je súbor hodnôt sústavne o niečo menší ako je tabuľková hodnota, meranie je zaťažené systematickou chybou.
 - Meranie je zaťažené hrubou chybou, výrazne sa líši tretia odmeraná hodnota 1,5 cm a ôsma 1,46 cm. [Späť](#)
- Konvenčne pravá hodnota je určená ako výberový priemer $m_p = \bar{m} = 9,88 \text{ g}$.
 - chyby pre šieste meranie: $\Delta m = 0,01 \text{ g}$, $\delta_m \% = 0,1 \%$
- výberový priemer frekvencie ladičky je 440,126 Hz
 - chyby pre výberový priemer: $\Delta f = 0,126 \text{ Hz}$, $\delta_f \% = 0,028 \%$
 - chyby pre 5. meranie: $\Delta f_5 = -0,6 \text{ Hz}$, $\delta_{f5\%} = 0,136 \%$
Opakované meranie zlepšilo výsledky merania.
- Relatívna chyba momentu zotrvačnosti je $\delta_I = 14,33 \%$.
- Absolútna chyba je $\Delta h = \pm 8,746 \cdot 10^{-35} \text{ Js}$.
Odmeraná hodnota Planckovej konštanty závisí od znamienka absolútnej chyby, preto môže nadobúdať dve hodnoty $h_n = h_{\text{tab}} + \Delta h = 7,5 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ alebo $h_n = h_{\text{tab}} - \Delta h = 5,5752 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.
- Správne odpovede: a) pre absolútnu chybu, c) pre relatívnu chybu. [Späť](#)
- Správna odpoveď c)
- Správna odpoveď b)
- Správna odpoveď a)
- Správna odpoveď c)
- Doplnenie tvrdení: a) neberieme do úvahy, b) konvenčne pravou hodnotou meranej veličiny, konvenčne pravú hodnotu, d) percentách, e) rovnaká ako jednotka meranej veličiny.

Časť 2.2

- Maximálna dovolená odchýlka je:
 - daná najmenším dielikom na stupnici váhy, čo zo zápisu hmotnosti je $m_{\text{max}} = 0,01 \text{ g}$,
 - daná pomocou triedy presnosti, ktorú vypočítame podľa vzťahu (2.7), $I_{\text{max}} = 0,001 \text{ A}$,
 - daná ako súčet dvoch maximálnych dovolených odchýliek (najmenších dielikov meradla) pozri [rozdiel](#) na str.28, $d_{\text{max}} = 2 \text{ mm}$,
 - daná najmenším dielikom na stupnici displeja voltmetra, $U_{\text{max}} = 0,0001 \text{ V}$,
 - daná najmenším dielikom na stupnici displeja mikrometra $l_{\text{max}} = 0,001 \text{ mm}$,
 - daná najmenším dielikom, ktorý vyplýva z nameraných hodnôt v tabuľke:
 $V_{\text{max}} = 1 \text{ ml}$, $p_{\text{max}} = 0,1 \text{ kPa}$, $T_{\text{max}} = 0,01 \text{ K}$, $N_{\text{max}} = 0,00001$. [Späť](#)
- Štandardná neistota typu B je určená vzťahom (2.6), z ktorého výpočtom:

- a) $u_{Bt} = 12,7 \text{ }^\circ\text{C}$,
 b) $u_{BU} = 0,138 \text{ V}$, kde U_{\max} bolo určené pomocou triedy presnosti,
 c) $u_{BV} = 5,773,10^{-4} \text{ l}$.
3. Správna odpoveď je b).
 4. Správna odpoveď je a), $t_{\max} = 0,01 \text{ s}$.
 5. Správna odpoveď je c).
 6. Správna odpoveď je b). [Späť](#)
 7. Správna odpoveď je c).
 8. Správna odpoveď je b).
 9. Správna odpoveď je c).
 10. Štandardná neistota typu B je daná vzťahom (2.6), z ktorého výpočtom $u_{Bd} = 2,886 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, zo vzťahu (2.4) odvodíme vzťah pre štandardnú neistotu typu A, $u_{A\bar{d}} = 5,0586 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.
 11. Výberový priemer priemeru guľôčok určíme pomocou vzťahu (1.1) $\bar{d} = 7,994 \text{ mm}$, štandardná neistota typu A je daná vzťahom (2.5), podľa ktorého $u_{A\bar{d}} = 0,022 \text{ mm}$.
 12. Výberový priemer napätia určíme pomocou vzťahu (1.1) $\bar{U} = 0,0858 \text{ V}$, štandardná neistota typu A určená pomocou vzťahu (2.5) je $u_{A\bar{U}} = 0,001593 \text{ V}$ a pomocou približného vzťahu $u_{A\bar{U}} = 0,43 \cdot (0,09 - 0,082) = 0,00344 \text{ V}$. [Späť](#)
 13. Na určenie relatívnej štandardnej neistoty použijeme vzťah (2.11), potom $u_{rI} = 6,667 \cdot 10^{-3}$. Zo vzťahu (2.10) pre absolútnu štandardnú neistotu $u_I = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 14. Na určenie relatívnej štandardnej neistoty použijeme vzťah (2.11), potom $u_{rV} = 0,00091$. Zo vzťahu (2.10) pre absolútnu štandardnú neistotu $u_V = 9,395 \text{ mm}^3$.
 15. Zo vzťahu pre rozšírenú neistotu (2.13) odvodíme vzťah pre kombinovanú neistotu, čo je absolútna štandardná neistota, jej hodnota vychádza $u_{CR} = 0,1918 \text{ } \Omega$. Pomocou hodnoty odporu a vzťahu pre relatívnu štandardnú neistotu (2.10) $u_{rR} = 0,361 \text{ } \%$.
 16. Maximálna dovolená odchýlka veličiny $z_{\max} = y \cdot x_{\max} + x \cdot y_{\max}$.

Časť 2.3

1. Správna odpoveď a).
2. Správna odpoveď a).
3. Správna odpoveď c).
4. Správna odpoveď b).
5.
 - a) $u_{Cd} = 5,77,10^{-3} \text{ mm}$, $u_{rd} = 0,023 \text{ } \%$, postup výpočtu ako v [príklade 5](#)
 - b) $u_{CR} = 0,1918 \text{ } \Omega$, $u_{rR} = 0,1647 \text{ } \%$, postup výpočtu ako v [príklade 6](#)
 - c) $u_{Ch} = 0,040979 \text{ mm}$, $u_{rh} = 0,0621 \text{ } \%$, postup výpočtu ako v [príklade 8](#)
 - d) $u_{CC} = 2,9485,10^{-8} \text{ F}$, $u_{rC} = 2,886 \text{ } \%$, postup výpočtu ako v [príklade 6](#)
 - e) $u_{CI} = 03,73596,10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $u_{rI} = 0,2823 \text{ } \%$, postup výpočtu ako v [príklade 6](#)
 - f) $u_{Cv} = 29,602 \text{ m/s}$, $u_{rv} = 9,29 \text{ } \%$, postup výpočtu ako v [príklade 9](#) [Späť](#)

6. Porovnaním výrazov $\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|_{u_{Bl}} = 4,8486 \cdot 10^{-3} \text{ kg} > \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|_{u_{BT}} = 4,6916 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ zo vzťahu (2) v [príklade 6](#) vychádza, že do absolútnej štandardnej neistoty tiažového zrýchlenia najviac prispieva meranie dĺžky závesu kyvadla l .
7. Porovnaním výrazov $\left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|_{u_{Bh}} = 11,157 \text{ mm}^3 > \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right|_{u_{Bd}} = 7,566 \text{ mm}^3$ vyplýva, že do absolútnej štandardnej neistoty objemu valčeka najviac prispieva meranie výšky valčeka.
8. Jednotlivé štandardné neistoty sú $u_{A\bar{h}} = 0,02908 \text{ mm}$, $u_{Bh} = 0,02886 \text{ mm}$. Z ich porovnania vyplýva, že príspevok oboch neistôt do kombinovanej neistoty je približne rovnaký. Presnosť opakovaného merania je porovnateľná s presnosťou prístroja, ktorým bola výška valčeka určená. [Späť](#)

Časť 2.4

1. $u_x = 0,006 \text{ cm}$, $u_m = 60 \text{ g}$, $u_t = 100 \text{ s}$, $u_I = 0,02 \text{ A}$
2. a) na jedno desatinné miesto: $l = 1843,5 \text{ mm}$, $t = 25,4 \text{ °C}$, $I = 0,4 \text{ A}$
b) na tri desatinné miesta: $l = 1843,522 \text{ mm}$, $I = 0,005 \text{ A}$, $I = 0,406 \text{ A}$, $x = 0,005 \text{ m}$
3. Správny zápis výsledku: $g = (9,81 \pm 0,08) \text{ m/s}^2$. Relatívna štandardná neistota zaokrúhlená na prvú číslicu $u_{rg} = 0,9\%$.
4. Správny zápis výsledku: $I = (0,0046 \pm 0,0005) \text{ A}$, $u_{rI} = 10\%$ [Späť](#)
5. Správny zápis výsledku: $v = (384,548 \pm 0,021) \text{ m/s}$
6. Správny zápis výsledku: $m = (301,458 \pm 0,016) \text{ g}$
7. Príklad 2: $\Delta g = 0,02 \text{ m/s}^2$, $\delta_g = 0,2\%$
Príklad 8: $d = (0,00592 \pm 0,00003) \text{ m}$ alebo $d = (592 \pm 3) \cdot 10^{-5} \text{ m}$, $u_{rd} = 0,5\%$
[Späť](#)
8. b)
9. c)
10. c)
11. a)
12. b)
13. b)
14. a) nenulová, b) dve prvé, c) od 6 - 9, d) nadol, e) veličiny a príslušnej neistoty, f) samostatne.

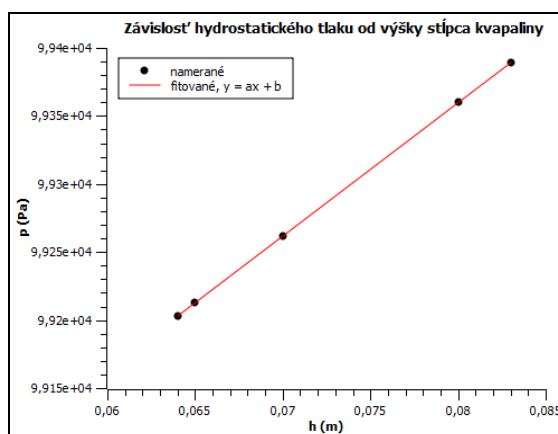
Kapitola 3

Časť 3.1

- 1.a) V grafe chýba názov grafu, regresná krivka a označenie veličín pri osiach. V grafe nie je vhodne zvolená voľba intervalu hodnôt na vodorovnej a zvislej osi.
 - b) V grafe chýba názov grafu a nie je vhodne zvolený interval hodnôt na vodorovnej a zvislej osi.
 - c) V grafe chýba legenda, os x je bez označenia, chýbajú body vyznačujúce odmerané veličiny a jednotka pri osi y pre rýchlosť.
 - d) V grafe chýba regresná krivka, legenda, je vymenený funkčný predpis (zamenené osi x a y). [Späť](#)
2. b)
 3. a)
 4. a) Osi na grafe znázorňujeme **plnou** čiarou.
b) K jednotlivým osiam vyznačíme **fyzikálne veličiny**, ktoré sa na ne vynášajú a k nim uvedieme príslušné jednotky do **okrúhlych zátvoriek**.
c) Pri popise osí grafu dodržiavame **funkčný** predpis.
d) K odmeraným hodnotám **nevynášať** čiary.
e) Cez vynesené body vedieme **regresnú** krivku.
f) Vypočítané hodnoty odlišíme iným **symbolom** od nameraných a uvedieme ich do **legendy**.

Časť 3.2

1. Porovnaním pravých a ľavých strán teoretického funkčného predpisu $R = at + b$ a predpisu pre odpor $R = R_0 + R_0\alpha t$, dostávame dve rovnice $R_0 = b$, $R_0\alpha = a$. Potom odpor pri počiatkovej teplote je $R_0 = b = 91,7 \Omega$. Úpravou druhej rovnice pre teplotný koeficient odporu $\alpha = a / R_0 = a / b = 4,798 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.
- 2.



Obr. 31

Porovnaním pravých a ľavých strán teoretického funkčného predpisu pre hydrostatický

tlak $p = p_a + \rho gh$ a predpisu regresnej krivky $y = ax + b$, dostávame dve rovnice $p_a = b$, $\rho g = a$. Potom atmosférický je $p_a = b = 98,57$ kPa. Úpravou druhej rovnice pre hustoty kvapaliny $\rho = a/g = 9791,501/9,81 = 998,11$ kg.m⁻³.

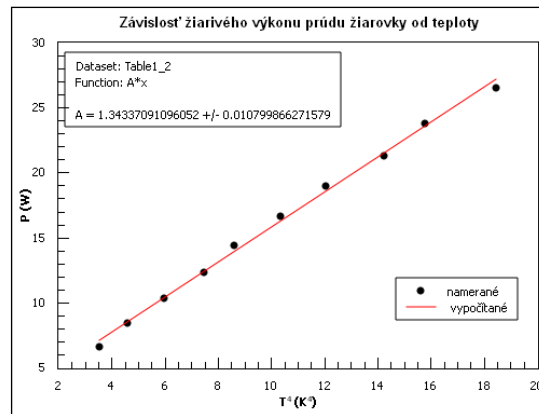
Zostrojený graf pomocou programu SciDavis (obr. 31).

3. Hodnota konštanty k určená pomocou MNŠ (vzťah [3.12](#))

[Späť](#)

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{10} P_i T_i^4}{\sum_{i=1}^{10} T_i^8} = 1,5342 \cdot 10^{-12} \text{ W.K}^{-4}.$$

Hodnota Stefanovej – Boltzmanovej konštanty sa určí porovnaním pravých a ľavých strán predpisu $y = ax$ a vzťahu $P = \sigma S \alpha T^4 = k T^4$. Odtiaľ $a = k = \sigma S \alpha$, úpravou Stefanova – Boltzmanova konštantu $\sigma = \frac{k}{S \alpha} = 7,5719 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Zostrojený graf pomocou programu SciDavis (obr. 32).



Obr. 32

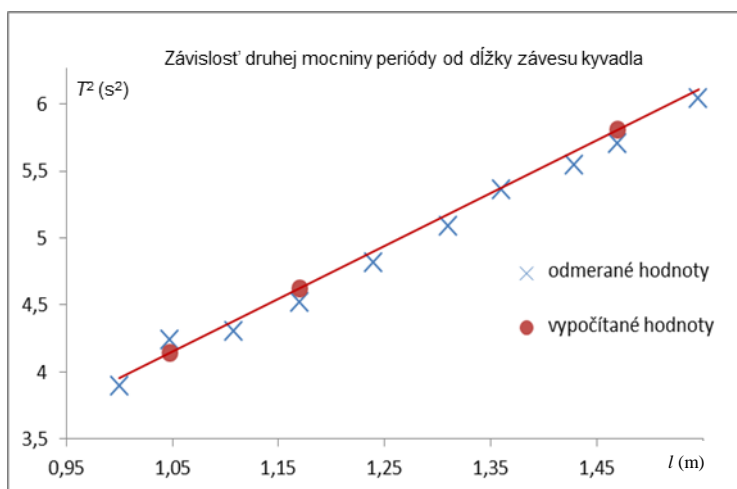
Absolútna štandardná neistota Stefanovej – Boltzmanovej konštanty sa určí ako neistota jednorozového nepriameho merania

$$u_{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial k} u_{Bk} = \left| \frac{1}{\alpha S} \right| u_k = 1,44 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4},$$

kde hodnota neistoty $u_k = 0,0292 \cdot 10^{-12} \text{ W.K}^{-4}$ bola určená podľa vzťahu (3.13). Potom správny zápis výsledku $\sigma = (7,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. [Späť](#)

4. Z [príkladu 14](#) vyplýva hodnota $a = v = 6,637$ m/s. Zvolíme dva body z tab. 5 (napr. $t_2 = 0,12$ s, $t_{17} = 1,92$ s) na zostrojenie regresnej krivky, pre ktorú platí funkčný predpis (1). Pomocou neho výpočtom pre t_2 : $s_2 = 0,7644$ m, pre t_{17} : $s_{17} = 6,10604$ m, cez ktoré je vedená regresná krivka.
5. Z [príkladu 15](#) vyplýva hodnota $k = 3,951$ s²/m. Zvolíme dva body z tab. 6 na zostrojenie regresnej krivky, pre ktorú platí funkčný predpis (1). Pomocou neho výpočtom: pre $l_2 = 1,048$ m, $T_2^2 = 4,140648$ s², pre $l_9 = 1,47$ m, $T_9^2 = 5,80797$ s², cez ktoré je vedená

regresná krivka. Zostrojený graf pomocou MNŠ (obr. 33).



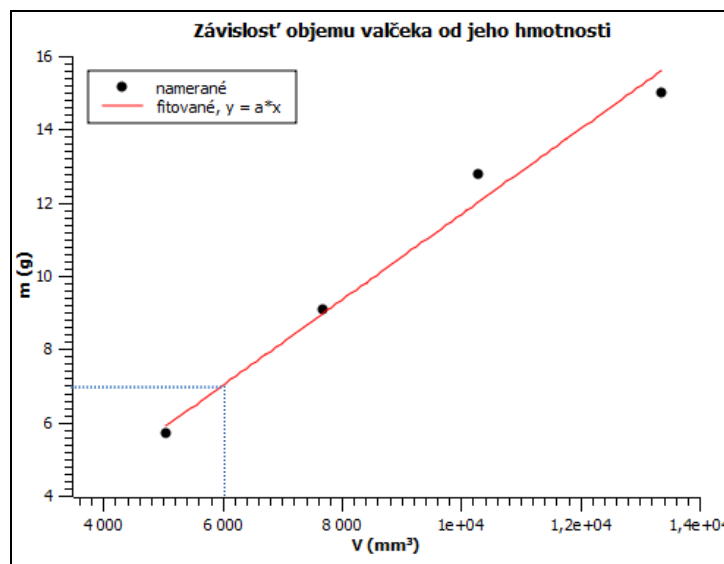
Obr. 33

6. a) $y = a/x$, b) $y = a \sin (bx + c)$
7. a) $y = ax$, b) $y = ae^{-bx}$, c) $y = ax + b$
8. a) $\ln \frac{A}{A_0} = -bt$, kde $y = \ln \frac{A}{A_0}$, $a = -b$, $x = t$,
 b) $p = \frac{Nk}{v}T = aT$, kde $y = p$, $x = t$, $a = Nk/T$,
 c) $\omega^2 = k \frac{1}{m}$, kde $y = \omega^2$, $x = \frac{1}{m}$ [Späť](#)
9. b)
10. b), c)
11. a)
12. c)
13. a) Pri metóde najmenších štvorcov sa hľadajú také parametre a, b, c, \dots , pre ktoré bude výraz $F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2$ **minimálny**.
 b) Matematicky sa pri metóde najmenších štvorcov určuje lokálny extrém funkcie pre výraz $F = \sum_{i=1}^n (y_{im} - y_i)^2$ podľa jednotlivých **parametrov** a dá sa rovný **nule**.
 c) Pri určovaní hodnôt fyzikálnych veličín pomocou parametrov a, b, c, \dots sa postupuje tak, že sa **porovná** funkčný predpis pre namerané veličiny s príslušnou teoretickou predpovedanou matematickou funkciou.
 d) Pri zostrojení regresnej krivky sa vypočítané hodnoty parametrov a, b, c **dosadia** do funkčného predpisu teoretickej závislosti $y_i = f(x_i)$ a zo súboru odmeraných hodnôt x_i sa vyberú **dve** hodnoty. Dosadia sa do funkčného predpisu a pre dané hodnoty parametrov a, b, c sa **vypočítajú** nové hodnoty y_i . Cez získané súradnice dvoch bodov $(x_i, y_i), (x_n, y_n)$ je **vedená**

Časť 3.3

1. Zostrojíme graf $m = f(V)$, ktorého teoretická závislosť je $m = \rho V$. Graf fitujeme známou funkciou $y = ax$.

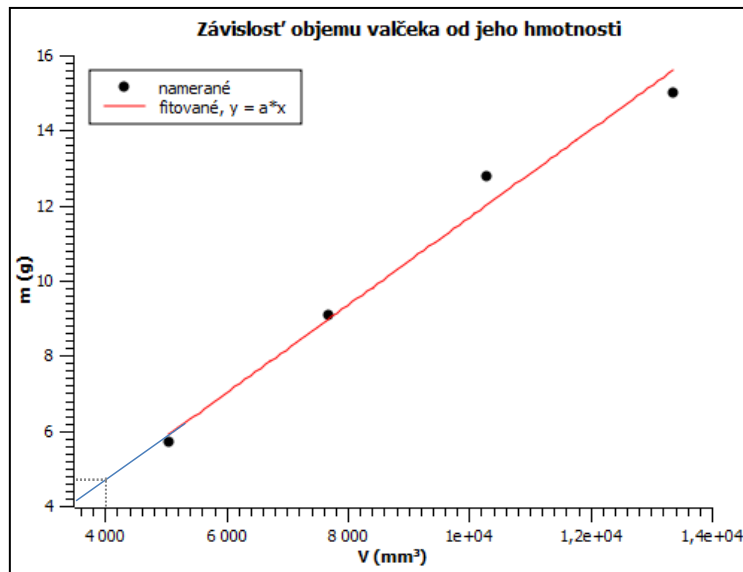
a) Pri určovaní hmotnosti valčeka pre objem 6000 mm^3 použijeme interpoláciu, kde hodnotu hmotnosti priamo odčítame z grafu (modrá bodkovaná čiara na obr. 34). Jej hodnota je $m = 7 \text{ g}$. Ak by sme hodnotu hmotnosti určili výpočtom pomocou parametra a , ktorého hodnota z fitu je $a = 0,001167 \text{ g/mm}^3$, potom $m = 7,002 \text{ g}$.

[Späť](#)

Obr. 34

b) Na určenie hmotnosti pri objeme 4000 mm^3 použijeme extrapoláciu. Najprv predĺžime regresnú krivku, pri zachovaní sklonu krivky, aby prechádzala požadovanou hodnotou objemu (modrá čiara na obr. 35). Potom odčítame hodnotu hmotnosti pre objem 4000 mm^3 (sivá čiarkovaná čiara na obr. 35), $m = 4,6 \text{ g}$. Výpočtom jej hodnota vychádza $m = 4,668 \text{ g}$.

[Späť](#)



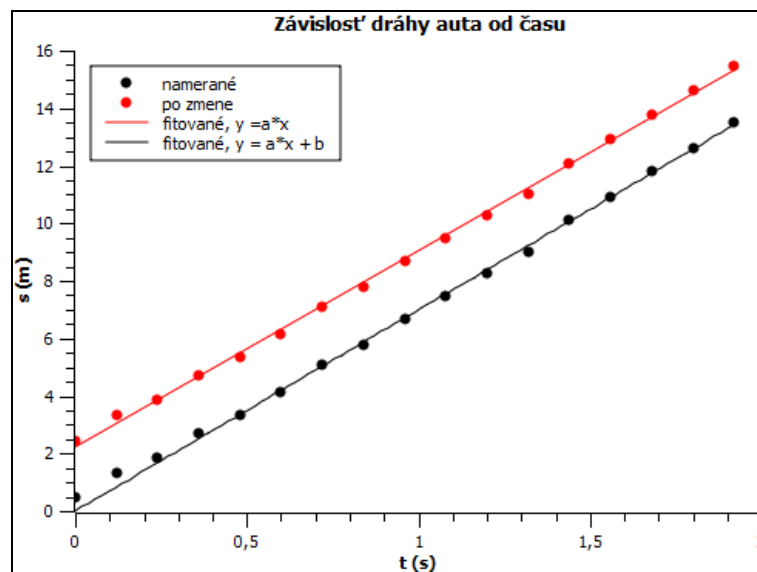
Obr. 35

2.
 - a) Pri interpolácii určujeme hodnotu veličiny y pre dané x , ktoré sa nezhoduje zo žiadnou z nameraných hodnôt x_i a leží v intervale $x_1 < x < x_n$.
 - b) Ak z meraného priebehu funkcie odhadujeme hodnotu y v bode x , ktorý leží mimo intervalu nameraných hodnôt použijeme metódu **extrapoláciu**.
 - c) Pri extrapolácii musíme brať do úvahy, že mimo merného intervalu, môžu na nami požadované hodnoty mať **vplyv** nové fyzikálne javy, ktoré sa v meranom intervale neprejavili.
 - d) Pri interpolácii známej teoretickej funkčnej závislosti $y_i = f(x_i)$, cez ktorú je vedená regresná krivka pomocou metódy najmenších štvorcov, sa hodnota y pre dané x sa určí **odčítaním** z grafu.
 - e) Ak pri extrapolácii nie je hodnota y veľmi ďaleko od nameranej závislosti a jej teoretický priebeh je lineárny, vedieme **priamku** cez hodnoty mimo interval nameraných hodnôt, tak aby prechádzala cez príslušný bod x , pre ktoré chceme určiť y . [Späť](#)

Časť 3.4

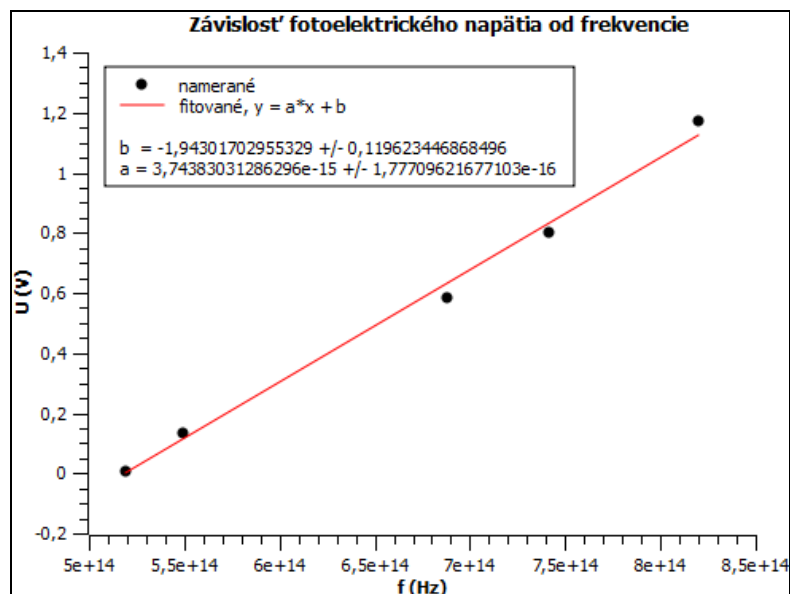
- $y = a \cdot x$,
 - $y = a \cdot \exp(-b \cdot x) \sin(cx + d)$,
 - $y = a \cdot x - b \cdot x^4$,
 - $y = \sqrt{x}$ ($1/x^4$).
- Zostrojené grafy sú na obr. 36. Po pripočítaní hodnoty 2 k hodnotám v y – novom stĺpci, bude nový graf začínať v bode 2 na osi x , čo predstavuje počiatočnú rýchlosť auta.

[Späť](#)



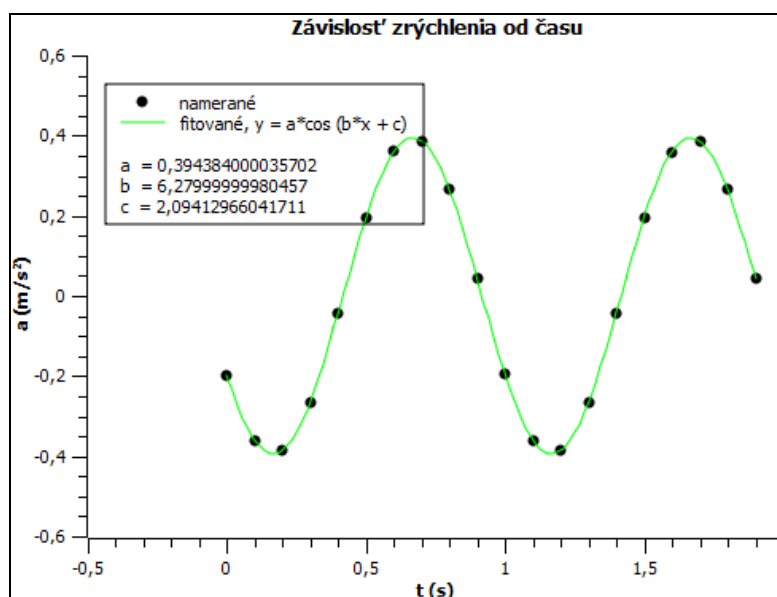
Obr. 36

- Zostrojený graf pomocou programu SciDavis (obr. 37). Porovnaním pravých a ľavých strán vzťahu (1) s teoreticky predpovedanou závislosťou $y = ax + b$, dostaneme $a = \frac{h}{e}$, (2) $b = \frac{-W}{e}$ (3). Hodnoty parametrov a , b a ich neistoty sa odčítajú z programu. Pomocou nich sa vypočítajú hodnoty požadovaných fyzikálnych veličín Planckova konštanta zo vzťahu 2 a výstupná práca zo vzťahu 3. Pomocou neistoty pre parameter a sa určí neistota Planckovej konštanty a neistota výstupnej práce sa určí ako v prípade nepriameho jednorazového merania (podobne ako v [príklade 17](#)) s použitím neistoty pre parameter b . Výsledky $h = (5,99 \pm 0,29) \cdot 10^{-34}$ J.s, $W = (-3,11 \pm 0,32) \cdot 10^{-19}$ J.



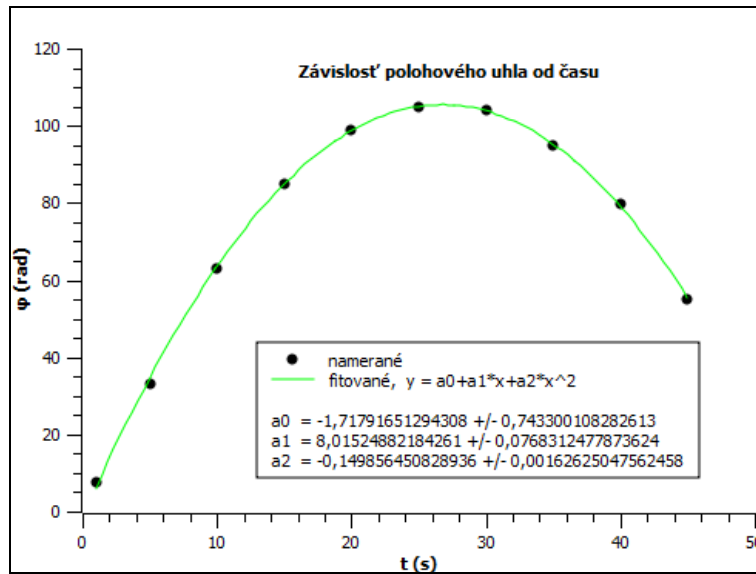
Obr. 37

4. Graf je na obr. 38. Porovnaním vzťahu $a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ s predpisom pre regresnú krivku, potom $a_{\max} = A\omega^2 = a = 0,394 \text{ m/s}^2$. Odtiaľ pre amplitúdu $A = 0,009 \text{ m}$. [Späť](#)



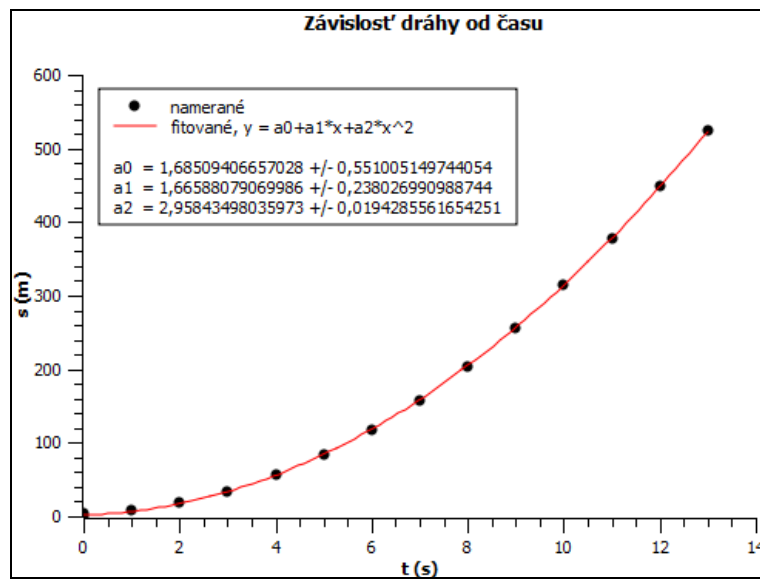
Obr. 38

5. Porovnaním teoretickej závislosti $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2$ s predpisom pre regresnú krivku (obr. 39) pre jednotlivé veličiny platí $\varphi_0 = a_0$, $\omega_0 = a_1$, $-1/2\alpha = a_2$. Pomocou neistôt pre jednotlivé parametre sa určia neistoty počiatočného uhla a počiatočnej uhlovej rýchlosti. Neistota uhlového zrýchlenia sa určí rovnako ako v [príklade 17](#). Výsledky $\varphi_0 = (-1,7 \pm 0,8) \text{ rad}$, $\omega_0 = (8,02 \pm 0,08) \text{ rad/s}$, $\alpha = (0,2997 \pm 0,0033) \text{ rad/s}^2$.



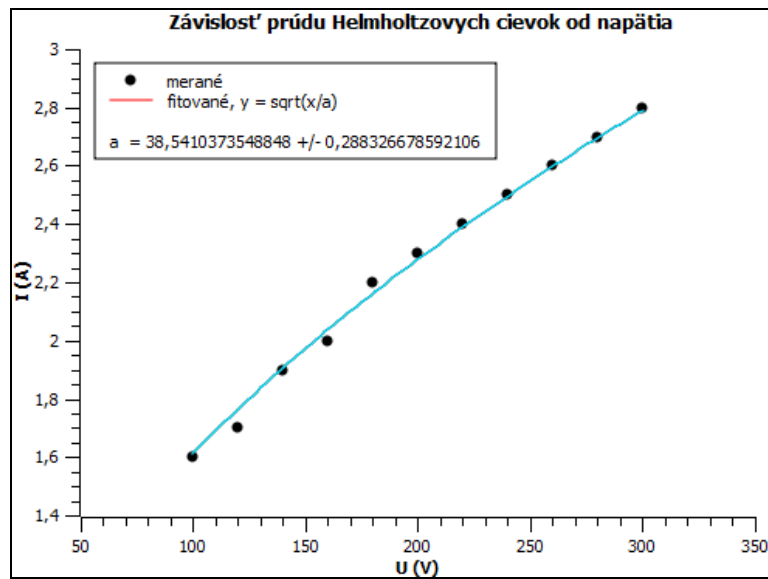
Obr. 39

6. Graf je na obr. 40. Postup určenia hodnôt počiatocnej rýchlosti, počiatocnej dráhy a zrýchlenia je rovnaký ako v [príklade 17](#). [Späť](#)



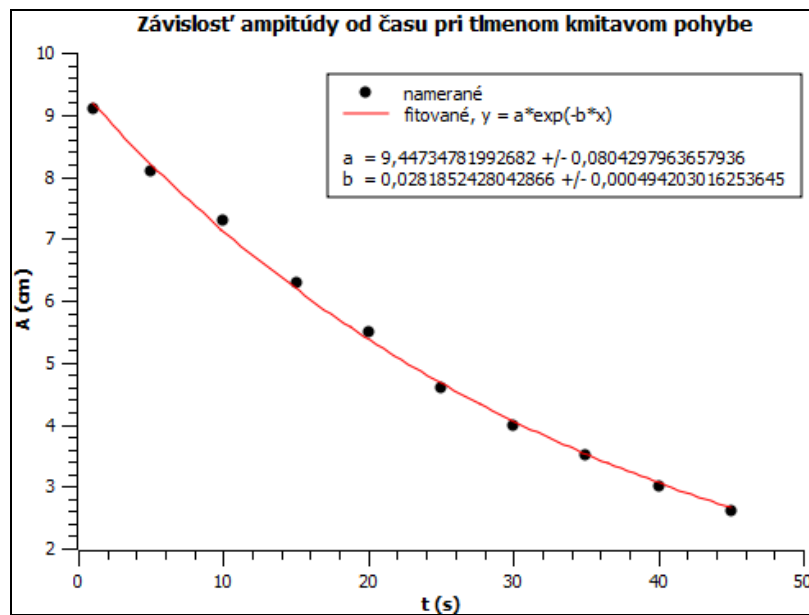
Obr. 40

7. Upravíme vzťah $\frac{e}{m} = \frac{2U}{(kIr)^2}$ na závislosť $I = \sqrt{\frac{U}{a}}$, kde $a = \frac{e(kr)^2}{2m}$. Potom pomocou parametra a je možné určiť hodnotu merného náboja elektrónu $e/m = 1,788 \cdot 10^{11}$ C/kg. Neistota sa určí rovnako ako v [príklade 17](#). Zápis výsledku $e/m = (1,8 \pm 0,2) \cdot 10^{11}$ C/kg.



Obr. 41

8. Graf je na obr. 42. Výsledky $A = (9,45 \pm 0,08) \text{ cm}$, $b = (0,0282 \pm 0,0005) \text{ s}^{-1}$. [Spät'](#)



Obr. 42

9. a)
 10. a)
 11. b)
 12. c)
 13. a)
 14. a)

[Spät'](#)

Kapitola 4

Časť 4.2

1.
 - a) $\varphi_{\max} = 4,13$, $\bar{\varphi} = 2,59$ rad, $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 41,4$ rad, $\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 = 134,12$ rad
 - b) $n = 16$, $s(n) = 5$ s, $t_{\max} = 15$ s, $u_{A\bar{t}} = \frac{s(n)}{\sqrt{n-1}} = \frac{5}{\sqrt{16-1}} = 1,29$ s,
 $u_{B\bar{t}} = \frac{t_{\max}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773$ s. [Späť](#)

2.
 - a) Pri určení neistôt pre okamžitú výchylku postupujeme rovnako ako v [príklade 19](#). Hodnoty neistôt sú
 $u_{C\bar{x}} = 0,009806$ m, $u_{r\bar{x}} = 13,61$ %.
 - b) Hodnota tuhosti pružiny bola určená nepriamo opakovaným meraním, preto pri výpočte absolútnej štandardnej neistoty použijeme vzťah
 $u_{C\bar{k}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial F}\right)^2 u_{CF}^2 + \left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{x}}\right)^2 u_{C\bar{x}}^2}$. Potom $u_{C\bar{k}} = 0,6458$ N/m, $u_{r\bar{k}} = 19,37$ %.
 - c) Zápis výsledku na prvú platnú číslicu : a) $\bar{x} = (0,07 \pm 0,01)$ m, $u_{r\bar{x}} = 20$ %, b) $\bar{k} = (3,3 \pm 0,7)$ N/m, $u_{r\bar{k}} = 20$ %.

3. Bez výsledkov. [Späť](#)
4. Doplňte tvrdenia:
 - a) Meranie štartujeme stlačením **zeleného tlačidla Štart** a zastavujeme stlačením **toho istého tlačidla**.
 - b) Parametre merania nastavujeme kliknutím na ikonu **Measurement settings** v hornej lište.
 - c) Výsledky merania ukladáme pomocou ikony **Save result as** .
 - d) Všetky úpravy v grafe urobíme pomocou ponuky Create/Edit Diagram, ktorú získame **výberom z ponuky, ktorá sa nám otvorí po kliknutí pravým tlačidlom myši** priamo v grafe.
 - e) Úpravy v tabuľke vykonáme v ponuke, ktorú získame kliknutím pravého tlačidla myši **priamo na tabuľke**.
 - f) Tabuľku pri kopírovaní celú označíme a vyberieme možnosť **Clipboard copy** .

5. b)
6. a)
7. c) [Späť](#)
8. b)
9. a)

Kapitola 5

Čast' 5.1 - 5.5

1. a) $d = 3,2$ mm, b) $l = 19,2$ mm, presnosť a) $d_{\max} = 0,1$ mm, b) $l_{\max} = 0,05$ mm
2. a) 11,91 mm, b) 55,95 mm, c) 4,62 mm, d) 6,94 mm, presnosť $d_{\max} = 0,01$ mm
3. a) $t = 240 + 36,29 = 276,29$ s, b) $t = 600 + 38,50 = 638,5$ s, presnosť $t_{\max} = 0,01$ s
4. a) trieda presnosti je 0,2 %, b) trieda presnosti je 2,5 %,

a) $U_{\max} = 0,3$ V,

b) $I_{\max} = 0,75$ A, $U_{\max} = 15$ V

[Spät'](#)

Použitá literatúra:

1. Demkanin, P. a kol.2006: *Počítačom podporované prírodovedné laboratórium*. Bratislava. 2006
2. Fričová, O., Gibová, Z., Hlaváčová, J. 2012: *Merania z fyziky*. Košice. Technická univerzita v Košiciach. 2012. ISBN 978-80-553-0869-2.
3. Gibová, Z. 2014: *Fyzikálne meranie 1*. Košice. Technická univerzita v Košiciach. 2014. ISBN 978-80-553-1782-3.
4. Gibová, Z.: *Fyzikálne meranie 2*. Košice. Technická univerzita v Košiciach. [CD-ROM]. ISBN 978-80-553-2366-4.
5. Ševčovič, L.2006: *Programy na spracovanie a vizualizáciu experimentálnych dát*. Slovak Open Source Initiative. Edícia vysokoškolských učebníc FEI TU v Košiciach. Východoslovenské Tlačiarne. Košice. 2006.
6. Ševčovič, L. 2015: *Fyzikálne merania*. Košice.: Elfa 2015. ISBN 978-80-8086-244-2.
7. <http://www.ddp.fmph.uniba.sk/~demkanin/CoachWebII/PDF/d006pSK.pdf>
- 8 <http://www.ddp.fmph.uniba.sk/~demkanin/CoachWebII/CoachUvod.htm>
9. <http://www.ddp.fmph.uniba.sk/~demkanin/CoachWebII/PDF/psp.pdf>
10. <http://web.tuke.sk/smetrologia/lm1.html>
11. <https://vimeo.com/30421152>
12. https://www.zborovna.sk/kniznica.php?action=show_version&id=85289

RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

Fyzikálne meranie

Vydavateľ: **Technická univerzita v Košiciach**

Náklad: 50 kusov

Počet strán: 155

Vydanie: prvé

2019

ISBN 978-80-553-3318-2