

**Fakulta elektrotechniky a informatiky**  
**Technická univerzita v Košiciach**

**FYZIKA PO ČASTIACH**  
**Mechanické vlnenie**

**Zuzana Gibová**

**Košice, 2018**



**Fakulta elektrotechniky a informatiky**  
**Technická univerzita v Košiciach**

**FYZIKA PO ČASTIACH**  
**Mechanické vlnenie**

**Zuzana Gibová**

**Košice, 2018**

RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

## **FYZIKA PO ČASTIACH - Mechanické vlnenie**

Prvé vydanie 2018

**Copyright** © Zuzana Gibová

Recenzenti: RNDr. Oľga Fričová, PhD., RNDr. Ján Kecer, PhD.

Rukopis neprešiel redakčnou a jazykovou úpravou.

**ISBN 978-80-553-3401-1**

## 4. Mechanické vlnenie



Prečo človek, ktorý je ponorený pod hladinou mora počuje skôr prichádzajúci motorový čln ako človek, ktorý je nad hladinou?

<b><u>4.1 Mechanické vlnenie</u></b>	7
<b><u>4.2 Rýchlosť vlnenia</u></b>	14
<b><u>4.3 Rovnica postupnej vlny</u></b>	21
<b><u>4.4 Skladanie vlnení</u></b>	28
<b><u>4.5 Stojaté vlnenie</u></b>	40

V tejto kapitole sa budeme zaoberať mechanickým vlnením. Vysvetlíme ako vzniká, čo je jeho zdrojom a odpovieme na otázku v akom prostredí sa šíri. Zadefinujeme a odvodíme veličiny, ktoré toto vlnenie popisujú. Vysvetlíme, aký je rozdiel medzi postupným a stojatým vlnením. Ukážeme ako sa správa vlnenie pri skladaní dvoch vlnení postupujúcich v rovnakom smere aj oproti sebe.

## Použité symboly a označenia v texte:

Podfarbením je uvedená slovná definícia veličiny, vzorec pod podfarbeným textom je matematickým vyjadrením definovanej veličiny.

V zdôraznenom rámečku sa nachádza odvodený vzťah (matematický zápis a slovná formulácia).

**Aplet** *Odkaz na aplet.*



*Odkaz na video.*



*Upozornenie na úpravy v texte a iné dôležité informácie.*

## 4. 1 Mechanické vlnenie

**Kľúčové slová:** mechanické vlnenie, zdroj vlnenia, látkové prostredie, postupné vlnenie, priečne a pozdĺžne vlnenie, lúč, vlnoplocha, Huyghensov princíp, čelo vlny

### Zopakujte si:

*Ako je definovaný netmený harmonický kmitavý pohyb z hľadiska dynamiky? Čo znamená, že je to harmonický pohyb?*

*Ako je definovaná rovnovážna poloha, amplitúda, perióda a frekvencia kmitavého pohybu?*

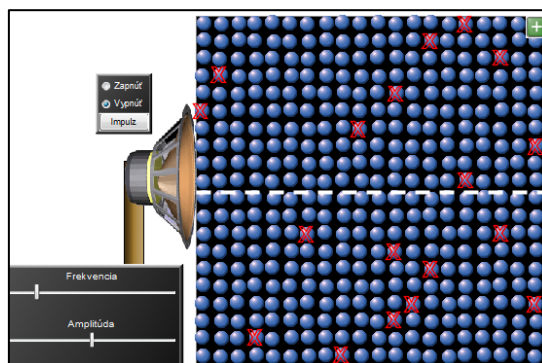
*Aký je matematický zápis a grafické zobrazenie časovej závislosti výchylky netmeného harmonického kmitavého pohybu?*

S vlnením sa bežne stretávame v našom živote. Napríklad na hladine jazera môžeme pozorovať vlny, ktoré sa tvoria pod vplyvom vetra. V dôsledku rozkmitania sa častíc vzduchu sa šíria zvukové vlny, ktoré počujeme, alebo v dôsledku pohybov zemskej platne dochádza k vzniku seizmických vln. Spomenuté príklady vlnenia nazývame mechanické vlnenie. Existuje aj elektromagnetické vlnenie, ktorého príkladom sú rádiové vlny, mikrovlny alebo viditeľné svetlo.



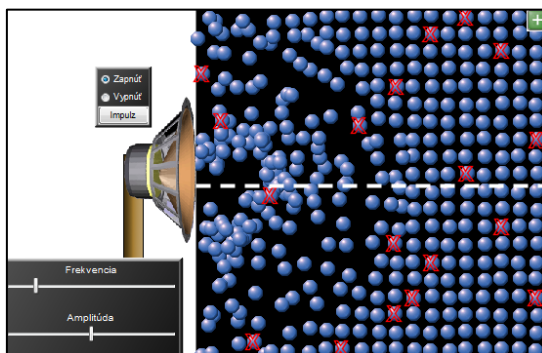
My sa v našich úvahách budeme zaoberať len mechanickým vlnením, pričom vzťahy a zákonitosti, ktoré odvodíme, budú platiť aj pre elektromagnetické vlnenie.

Najprv vysvetlíme ako vzniká mechanické vlnenie. Uvažujme reproduktor, ktorého membrána bude kmitať s určitou frekvenciou. Budeme skúmať ako sa bude správať okolie (molekuly vzduchu) okolo reproduktora. Pokiaľ reproduktor nevydáva zvuk, jeho membrána je v pokoji (obr. 4.1), molekuly vzduchu budú tiež v pokoji. V skutočnosti to neplatí, molekuly vzduchu vykonávajú tepelný pohyb, chaoticky sa pohybujú. Tento pohyb nevzniká kmitaním membrány reproduktora, preto ho budeme zanedbávať.



Obr. 4.1

Keď reproduktor zapneme (začne vydávať zvuk), bude jeho membrána periodicky narážať do molekúl vzduchu, čo spôsobí, že sa rozkmitajú a začnú narážať do ďalších molekúl (obr. 4.2).



Obr. 4.2

Takto sa kmitavý pohyb prenáša z membrány reproduktora prostredníctvom kmitania molekúl (cez ich zrážky) do okolia. Samotné molekuly sa v prostredí nepremiestňujú, len kmitajú okolo svojich rovnovážnych polôh s amplitúdou a frekvenciou zdroja. Prostredím sa začne šíriť vlna. Tento proces, prostredníctvom ktorého dochádza k šíreniu kmitania prostredím, nazývame **mechanické vlnenie**. Mechanické vlnenie patrí medzi najznámejšie vlnenia.

**Aplet** Pozrite aplet na šírenie mechanického vlnenie na adrese:  
<http://people.tuke.sk/zuzana.gibova/aplet7.htm>

Všetky príklady mechanického vlnenia, ktoré boli spomenuté v úvode, majú rovnaké vlastnosti. Riadia sa Newtonovými pohybovými zákonmi a šíria sa len v látkovom prostredí. Pod **látkovým prostredím** rozumieme prostredie, ktoré pozostáva z veľkého počtu častíc, medzi ktorými existuje vzájomné silové pôsobenie (väzba). Príkladom takého prostredia je voda, vzduch alebo hornina. Mechanické vlnenie sa na rozdiel od elektromagnetického vlnenia nešíri vo vákuu.

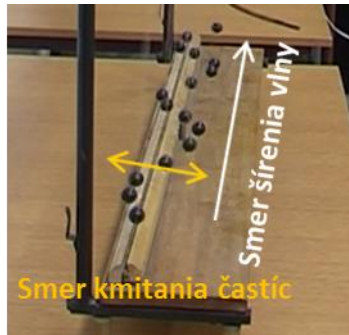
**Zdrojom vlnenia** je kmitavý pohyb (napr. kmitanie membrány reproduktora, ladičky, struny). Zdroj vlnenia, podobne ako častice prostredia, sa nepremiestňuje, ale kmitá



okolo svojej rovnovážnej polohy. Vlnenie, pri ktorom sa rozruch (kmitanie) prenáša na ďalšie body prostredia nazývame **postupné vlnenie**.

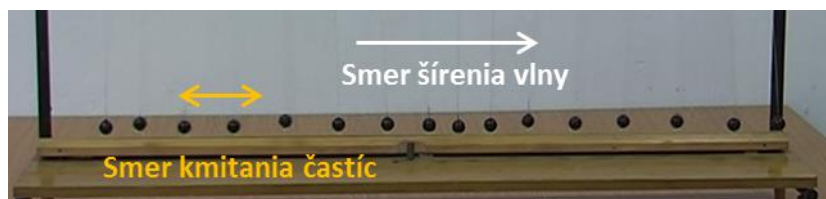
Podľa toho ako kmitajú častice prostredia vzhľadom na smer šírenia vlnenia rozoznávame dva druhy postupného vlnenia:

- a) postupné priečne vlnenie – pri ktorom častice kmitajú v smere kolmom na smer šírenia vlnenia (obr. 4.3 a),



Obr. 4.3 a

- b) postupné pozdĺžne vlnenie – pri ktorom častice kmitajú rovnobežne so smerom šírenia vlnenia (obr. 4.3 b). V tomto prípade vznikajú zhustenia a zriedenia častíc v smere šírenia vlnenia.



Obr. 4.3 b



Pozrite videá na druhy mechanického vlnenie:

<http://web.tuke.sk/feikf/video/mechanicke-vlnenie---sirenje-vlny.html>

<http://www.fch.vut.cz/lectures/video/> - video: P16a\_Mechanicke\_vlneni.mpg

### Kontrolka 1:

Vyberte správnu odpoveď.

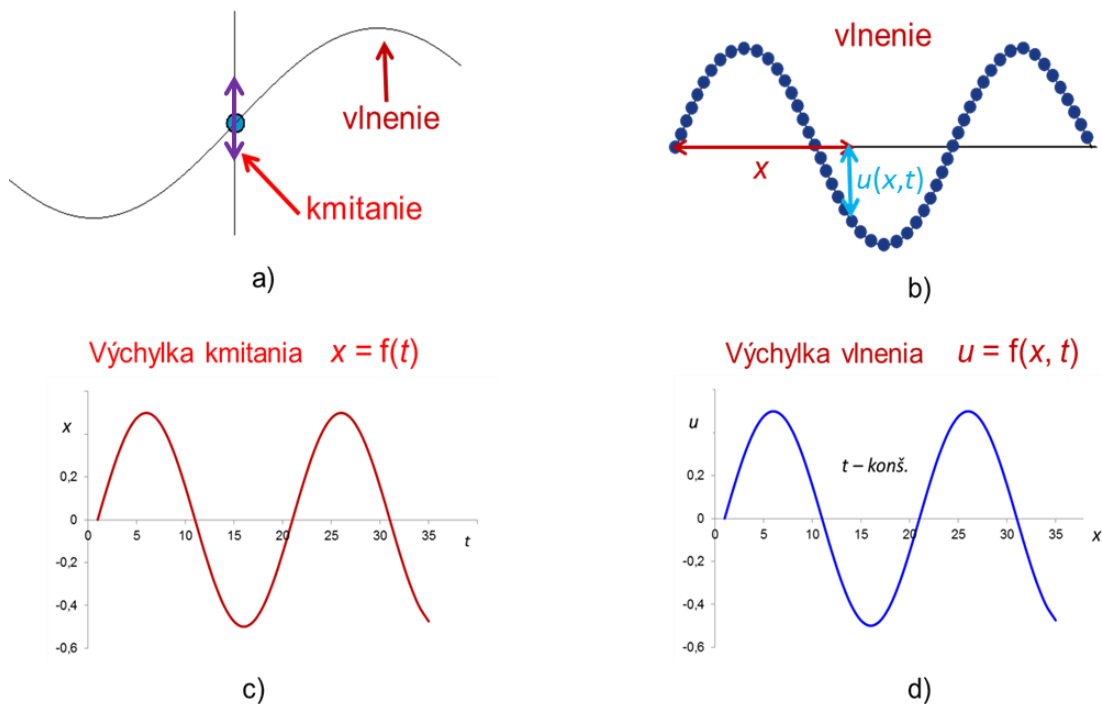
a) mechanické vlnenie sa šíri vo vákuu,

b) zdrojom vlnenia je kmitajúci predmet,

c) pri postupnom priečnom vlnení častice kmitajú rovnobežne so smerom šírenia vlnenia.

[Odpoveď](#)

Vlnenie súvisí s kmitavým pohybom. *Kmitanie* je pohyb telesa po časti priamky okolo rovnovážnej polohy (obr. 4.4 a). *Vlnenie* je prenos kmitavého pohybu zdroja prostredím (obr. 4.4 b).



Obr. 4.4

Výchylka kmitavého pohybu jednej častice prostredia, ktorá kmitá v určitej vzdialenosti od zdroja, je funkciou času  $x = f(t)$ , napríklad je daná ako výchylka netlmeného harmonického kmitavého pohybu (obr. 4.4 c). Pri vlnení vlna nadobúda v rôznych časoch rôzne tvary. Tvar vlny je vytvorený množinou častíc, ktoré sú v danom čase v rôznych výchylkách (obr. 4.4 b). Potom pri popise výchylky ľubovoľnej častice vlny musíme brať do úvahy aj jej polohu (vzdialenosť od zdroja  $x$ ), preto výchylka vlnenia je funkciou času aj vzdialenosti  $u = f(x, t)$ .



**Zapamätajte si, že výchylku vlnenia budeme označovať  $u(x, t)$ .**

### Kontrolka 2:

Vyberte správnu odpoveď. Výchylka vlnenia je funkciou

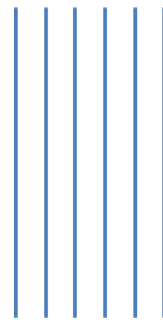
- a) len času,
- b) len vzdialenosti,
- c) vzdialenosti a času.

[Odpoveď](#)

Smer, ktorým sa vlnenie šíri, vyjadruje tzv. **lúč**. V prípade šírenia v jednom smere, je smer vlnenia daný len jedným lúčom (na obr. 4.3 je znázornený bielou šípkou). Reálne sa vlnenie šíri v priestore ako zväzok lúčov. Potom súhrn bodov do ktorých sa vlnenie dostalo za určitý časový interval nazývame **vlnoplocha**. Body, ktoré ju tvoria, kmitajú s rovnakou fázou. Ak sa vlnenie šíri z bodového zdroja v prostredí, ktorého vlastnosti sa nemenia, vlnoplocha je guľová v trojrozmernom priestore. V dvojrozmernom prostredí pozorujeme vlny v tvare kružníc (obr. 4.5 a). Vo veľkých vzdialenostiach od zdroja možno vlnoplochu pokladať za rovinnú (obr. 4.5 b). **Čelo vlnenia** tvorí vlnoplocha, ktorá sa v danom okamihu nachádza v najväčšej vzdialenosti od zdroja.



a)



b)

Obr. 4.5

Na nasledujúcom obrázku sú zobrazené vlnoplochy v tvare kružníc, ktoré vznikli na vodnej hladine v dôsledku kmitavého pohybu nôh labute.



### Kontrolka 3:

Vyberte správnu odpoveď. Vlnoplocha

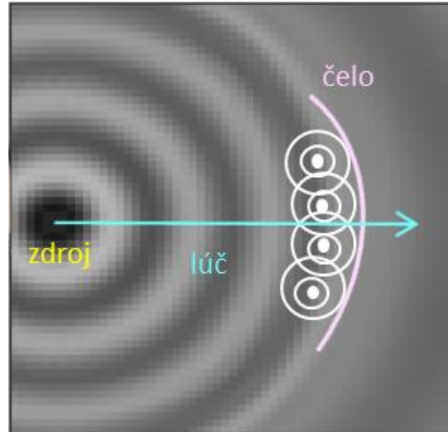
a) vyjadruje smer vlnenia,

b) tvoria ju body, do ktorých sa vlnenie dostalo za daný časový interval,

c) sa nachádza v najväčšej vzdialenosti od zdroja v danom okamihu.

[Odpoveď](#)

Vznik vlnenia v priestore je možné vysvetliť pomocou **Huyghensovho princípu**, ktorý hovorí, že každý bod, do ktorého vlnenie došlo, možno považovať za nový (sekundárny) zdroj vlnenia. Vlny vychádzajúce zo sekundárnych zdrojov sa navzájom skladajú a vlnenie postupuje ďalej. Čelo vlnenia tvorí vonkajší obal všetkých elementárnych vlnoplôch pochádzajúcich od sekundárnych zdrojov (obr. 4.6).



Obr. 4.6

## Otázky na zopakovanie:

1. Vysvetlite ako vzniká mechanické vlnenie.
2. Čo je zdrojom vlnenia a v akom prostredí sa šíri?
3. Vysvetlite, prečo sa mechanické vlnenie nemôže šíriť vo vákuu?
4. Aký je rozdiel medzi kmitaním a vlnením?
5. Čo zobrazuje lúč?
6. Ako je definovaná vlnoplocha?
7. Čo hovorí Huyghensov princíp?
8. Ako je definované čelo vlny?
9. Vysvetlite, prečo keď hodíme kameň do vody, tvoria sa okolo neho kruhy? Čo to znamená?
10. Vysvetlite, prečo vlny na vodnej hladine neodnášajú plávajúce predmety, ale len nimi hýbu nahor a nadol?
11. Doplňte tvrdenia:
  - a) Pri postupom vlnení sa rozruch prenáša na .....
  - b) Pri postupnom priečnom vlnení častice kmitajú ..... na smer šírenia sa vlnenia.
  - c) Častice kmitajú rovnobežne so smerom šírenia vlnenia pri ..... vlnení.
  - d) Výchylka častice pri kmitaní je funkciou .....
  - e) Výchylka častice pri vlnení je funkciou ..... a .....
  - f) Body vlnoplochy kmitajú s ..... fázou.

[Odpovede](#)

## 4.2 Rýchlosť vlnenia

**Kľúčové slová:** izotropné prostredie, vlnová dĺžka, fázová rýchlosť, rýchlosť kmitania častíc, rýchlosť priečneho a pozdĺžneho vlnenia v pevných látkach, rýchlosť pozdĺžnych vln v kvapalinách a plynch

### Zopakujte si:

Čo znamená, že oscilátor kmitá harmonicky?

Ako je definovaná amplitúda a perióda kmitavého pohybu?

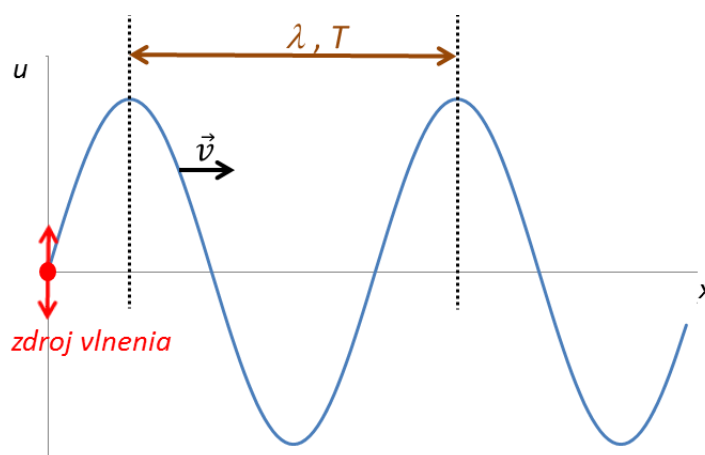
Aký je vzťah medzi frekvenciou a periódou kmitavého pohybu?

Ako je definované postupné priečne vlnenie a postupné pozdĺžne vlnenie?

S akou rýchlosťou sa pohybuje teleso pri rovnomernom priamočiariom pohybe a ako je daná rovnica jeho dráhy?

Vo všeobecnosti, rýchlosť vlnenia závisí od vlastností prostredia, v ktorom sa šíri. Rýchlosť mechanického vlnenia budeme definovať za ideálnych podmienok v tzv. **izotropnom prostredí**, pod ktorým rozumieme prostredie s rovnakými vlastnosťami v celom svojom objeme (napr. sa nemení tlak, teplota a hustota prostredia). Navyše predpokladajme, že to prostredie je pružné.

Nech v tomto prostredí kmitá zdroj vlnenia podľa harmonickej funkcie sínus a vlnenie sa šíri kolmo na smer kmitania zdroja vlny, ktorý sa nachádza v počiatku súradnicového systému. Potom sa prostredím začne šíriť vlna s frekvenciou a amplitúdou zdroja, ktorá bude mať sínusový priebeh (obr. 4.5).



Obr. 4.5

Aby sme mohli definovať rýchlosť, ktorou sa vlna šíri, zavedieme novú veličinu, ktorú nazveme **vlnová dĺžka**. Budeme pod ňou rozumieť najkratšiu vzdialenosť v smere postupu vlnenia medzi dvoma bodmi prostredia, ktoré kmitajú s rovnakou fázou (napr.

maximum vlnenia – amplitúda). Je zrejmé, že túto vzdialenosť vlnenie prejde za dobu, ktorá je rovná perióde vlnenia. Vlnenie sa šíri v izotropnom prostredí, preto sa rýchlosť vlnenia nemení. Vlnenie postupuje rovnomerným priamočiarym pohybom v smere osi  $x$ . Tento poznatok využijeme pri definovaní rýchlosti.

**Rýchlosť (fázová rýchlosť)**, je rýchlosťou ktorou sa šíri rovnaká fáza kmitavého pohybu. Je definovaná ako podiel vlnovej dĺžky  $\lambda$  a periódy vlnenia (t.j. periódy kmitania častíc  $T$ )

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (1)$$



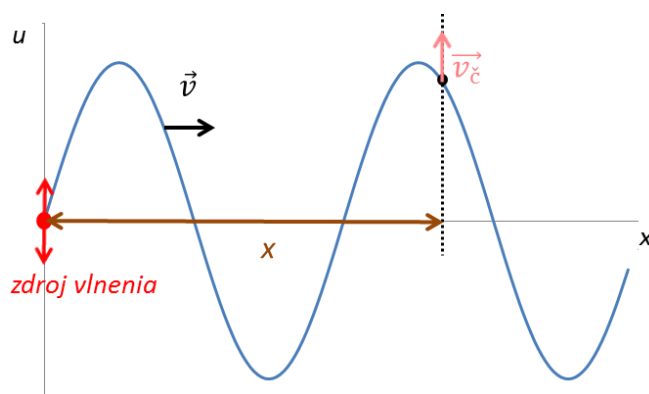
Pri vyjadrení rýchlosti sme vychádzali z poznatku, že rýchlosť rovnomerného priamočiareho pohybu je daná  $v = \frac{s}{t}$ .

Zo vzťahu (1) je možné vyjadriť **vlnovú dĺžku** v tvare

$$\lambda = vT. \quad (2)$$

Je to dráha, ktorú prejde fáza vlny počas jednej periódy.

Z definície (1) vyplýva, že rýchlosť, ktorou sa šíri vlnenie v izotropnom prostredí je konštantná a má smer šírenia vlnenia. Neplatí to ale pre rýchlosť častíc prostredia  $v_c$ , ktoré vlnenie prenášajú. Ich rýchlosť sa periodicky mení s časom.



Obr. 4.6

V prípade, že zdroj kmitá harmonicky, mení sa rýchlosť častíc tiež podľa harmonickej funkcie. Smer rýchlosti kmitania častíc je rovnaký ako smer, ktorým kmitá zdroj. V našom prípade budú častice kmitať kolmo na smer šírenia sa vlnenia (obr. 4.6).

#### Kontrolka 4:

Vyberte správnu odpoveď. Rýchlosť šírenia vlnenia izotropným prostredím

- a) má smer kmitania zdroja,
- b) sa mení s časom,
- c) je konštantná.

[Odpoveď](#)

Rýchlosť šírenia vlnenia reálne závisí od prostredia, v ktorom sa šíri. Napríklad zvukové vlny sa šíria vo vode rýchlosťou  $v = 1402 \text{ m/s}$  a v hélíu rýchlosťou  $v = 965 \text{ m/s}$  pri  $0^\circ \text{ C}$ .

To, či sa bude v danom prostredí šíriť priečne alebo pozdĺžne vlnenie, ovplyvnia tiež vlastnosti daného prostredia. Platí, že *pozdĺžne vlnenie* vyvoláva zmenu objemu danej látky, zatiaľ čo *priečne vlnenie* vyvoláva zmenu jej tvaru.

Pevné látky sa bránia zmene tvaru a objemu. Pri natáhaní alebo skrúcaní cítíme napätie v látke. Preto sa bude v pevných látkach šíriť pozdĺžne aj priečne vlnenie.

Rýchlosť šírenia **pozdĺžneho vlnenia v pevnej látke** je daná

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v ťahu a  $\rho$  je hustota materiálu.

Rýchlosť šírenia **priečného vlnenia v pevnej látke** je vyjadrená podobne

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (4)$$

kde  $G$  je modul pružnosti v šmyku a  $\rho$  je hustota materiálu.

---

**Príklad 1:** Vypočítajte rýchlosť šírenia pozdĺžnych a priečných vln v oceli s hustotou  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ , keď modul pružnosti ocele v ťahu  $E = 20.10^{10} \text{ Pa}$  a v šmyku  $G = 8.10^{10} \text{ Pa}$ .

$$E = 20.10^{10} \text{ N.m}^{-2}$$

$$G = 8.10^{10} \text{ N.m}^{-2}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$v = ?$$

Použitím vzťahu (3) pre rýchlosť pozdĺžneho vlnenia v oceli

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20.10^{10}}{7800}} = 5063,7 \text{ m/s.}$$



Podľa vzťahu (4) pre rýchlosť priečného vlnenia v oceli

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10}}{7800}} = 3202,6 \text{ m/s.}$$

**Rýchlosť pozdĺžnych vln v oceli je 5063,7 m/s a priečných 3202,6 m/s.**

Kvapaliny a plyny sa bránia len zmene objemu, nebránia sa zmene tvaru. Ak nalejeme kvapalinu alebo natlakujeme plyn do nádoby rôzneho tvaru, kvapalina aj plyn zaujmú tvar nádoby (napr. voda zaujme tvar valcovitej vázy alebo tvar fľaše, plyn zaujme tvar futbalovej lopty alebo balónu). Pri stlačení lopty alebo minerálky v plastovej nádobe počítujeme napätie v malej časti objemu. Kvapalina a plyn sa bránia tejto lokálnej zmene objemu. Preto sa v kvapalinách a plynch šíri len pozdĺžne vlnenie, okrem povrchu kvapalín, kde sa šíri aj priečne vlnenie.

Rýchlosť **pozdĺžneho vlnenia v kvapalinách a plynch** je daná

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (5)$$

kde  $K$  je modul objemovej pružnosti a  $\rho$  je hustota materiálu.

Konštanty  $E$ ,  $G$  a  $K$  v rovniciach (3) - (5) charakterizujú vlastnosti jednotlivých prostredí, v ktorých sa vlnenie šíri. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené rýchlosti pozdĺžneho vlnenia zvuku v rôznych prostrediach.

Rýchlosť šírenia vlnenia (m/s)					
Pevná látka		Kvapalina		Plyn	
Ľad	3200	Ortuť (20 °C)	1400	Oxid uhličitý (25 °C)	259
Hliník	6420	Etanol (20 °C)	1162	Vzduch (20 °C)	343
Med'	3500 - 4720	Voda (20°C)	1482	Kyslík (25 °C)	316
Žula	6000	Destilovaná voda (25 °C)	1497	Vodík	1286

Tab. 1



Na základe týchto poznatkov môžeme odpovedať na otázku z úvodu kapitoly. Rýchlosť šírenia sa zvuku vo vzduchu je 343 m/s pri 20°C a v morskej vode 1522 m/s. Zvuk sa šíri rýchlejšie v morskej vode, preto človek, ktorý je ponorený pod hladinou mora, počuje zvuk motora prichádzajúceho člna skôr ako človek, ktorý sa prechádza po pláži.



**Rýchlosť zvuku vo vzduchu závisí od teploty prostredia  $t$  (°C) podľa vzťahu**  
 $v = 331,6 + 0,61t$ .

**Kontrolka 5:**

Vyberte správne odpovede. Priečne vlnenie

- a) sa šíri vo všetkých prostrediach,
- b) vyvoláva zmenu objemu,
- c) sa šíri v pevných látkach,
- d) vyvoláva zmenu tvaru.

[Odpoveď](#)

## Otázky na zopakovanie:

1. Vysvetlite pojem izotropné prostredie.
2. S akou frekvenciou a amplitúdou sa šíri vlnenie prostredím? Aký má tvar vlna, od čoho to závisí?
3. Ako nazývame najkratšiu vzdialenosť medzi dvoma minimami vlnenia?
4. Definujte fázovú rýchlosť a vyjadrite jej matematický zápis.
5. Vysvetlite, prečo je rýchlosť vlnenie konštantná v izotropnom prostredí?
6. Vysvetlite ako je možné, že keď priložíme ucho ku koľajniciam, počujeme vlak prichádzať skôr ako v okolí koľajnic vo vzdialenosti 10 m od nich.
7. Doplňte tvrdenia:
  - a) Rýchlosť šírenia vlnenia v izotropnom prostredí je .....
  - b) Rýchlosť kmitania častíc prostredia sa ..... s časom.
  - c) Vlnová dĺžka je dráha, ktorú prejde fáza vlny počas jednej .....
  - d) Smer rýchlosti vlnenia je ..... ako smer šírenia sa vlnenia.
  - e) Smer rýchlosti kmitania častíc je ..... ako smer .....
  - f) V pevných látkach sa šíri ..... a ..... vlnenie.
  - g) Kvapaliny sa bránia zmene ..... a nebránia sa zmene .....
  - h) Pevné látky sa bránia zmene ..... a .....
8. Vyberte správnu odpoveď. Rýchlosť vlnenia so zväčšujúcou sa periódou pri danej vlnovej dĺžke
  - a) klesá,
  - b) narastá,
  - c) sa nemení.
9. Vyberte správnu odpoveď. Vlnenie prejde za štvrtinu periódy
  - a) celú vlnovú dĺžku,
  - b) polovicu vlnovej dĺžky,
  - c) štvrtinu vlnovej dĺžky.

[Odpovede](#)

10. Vyberte správnu odpoveď. Pozdĺžne vlnenie v pevnej látke závisí od
- a) modulu pružnosti v šmyku a hustoty materiálu,
  - b) modulu pružnosti v ťahu a hustoty materiálu,
  - c) modulu objemovej pružnosti a hustoty materiálu.
11. Vypočítajte vlnovú dĺžku zvuku s frekvenciou 1000 Hz šíriaceho sa vo vode rýchlosťou 1482 m/s.
12. Vlnenie s frekvenciou 2500 Hz sa šíri v troch rôznych prostrediach. V prvom prostredí sa šíri rýchlosťou 6000 m/s, v druhom s rýchlosťou 1500 m/s a v treťom rýchlosťou 250 m/s. Aké budú jeho vlnové dĺžky v jednotlivých prostrediach, ak sa frekvencia vlnenia nemení?
13. Vypočítajte, akú rýchlosť dosahujú vlny tsunami pri pobreží, ak na širom mori v mieste vzniku majú vlnovú dĺžku 200 km a rýchlosť 700 km/h. Vlnová dĺžka pri pobreží je 8 km. Predpokladajte, že vlny majú s rovnakú frekvenciu.
14. Merania ukázali, že vlne s frekvenciou 1 900 Hz v istom prostredí odpovedá vlnová dĺžka 18 cm. Určte rýchlosť tejto vlny.
15. Rybár pozoruje, že vrcholce vlnenia prechádzajú okolo jeho ukotveného člňa každých 5,0 s. Vzďialenosť medzi susednými vrcholcami odhadol na 12 m. Akou rýchlosťou sa pohybujú tieto vlny?
16. Vypočítajte modul pružnosti v ťahu striebra, ak jeho hustota je 10500 kg/m<sup>3</sup> a rýchlosť pozdĺžneho vlnenia v striebre je 2743 m/s. Akou rýchlosťou sa šíria priečne vlny v striebre, ak modul pružnosti v šmyku striebra je 28,7 GPa.
17. Vypočítajte rýchlosť šírenia pozdĺžneho vlnenia vo vode, ak modul objemovej pružnosti vody pri 50°C je 2,46 GPa a hustota vody a je 1000 kg/m<sup>3</sup>.

[Odpovede](#)

## 4.3 Rovnica postupnej vlny

**Kľúčové slová:** výchylka zdroja vlnenia, rovnica postupnej vlny, výchylka častice, uhlové vlnové číslo

### Zopakujte si:

Čo je zdrojom vlnenia?

Aká je frekvencia a amplitúda vlnenia, ktoré sa šíri prostredím vzhľadom na zdroj?

Od čoho závisí tvar vlnenia?

Ako sa šíri postupné vlnenie prostredím?

Aká je rýchlosť vlnenia v izotropnom prostredí?

Ako je daná dráha pri rovnomernom priamočiarom pohybe?

V časti 4.1 sme si povedali, že pri postupnom vlnení sa šíri kmitavý pohyb zdroja prostredím postupne z častice na časticu. Bude nás zaujímať, ako je daná výchylka častice prostredia pri postupnom vlnení, ktorá vo vzdialenosti  $x$  od zdroja kmitá okolo svojej rovnovážnej polohy. Pri odvodení budeme predpokladať, že zdrojom vlnenia je kmitavý harmonický pohyb, ktorého výchylku popíšeme v tvare

$$u(0, t) = A \sin \omega t.$$



**Zapamätajte si, že výchylku zdroja vlnenia budeme označovať  $u(0,t)$ , kde  $x = 0$  znamená, že zdroj je umiestnený v počiatku súradnicového systému.**

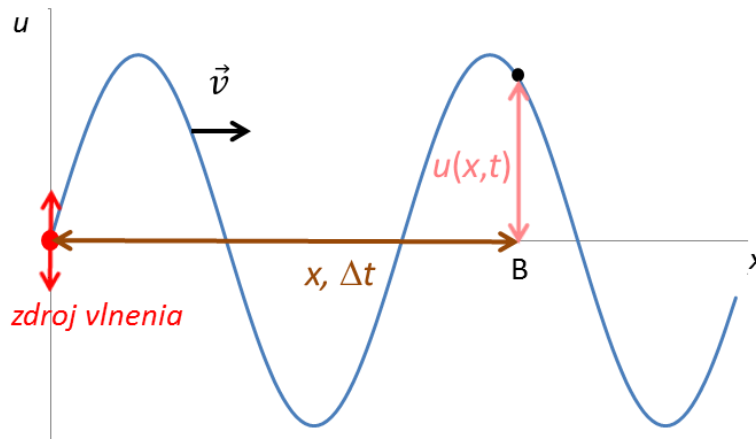
Zo zdroja sa začne šíriť vlnenie v kladnom smere osi  $x$ , má sínusový priebeh s rovnakou amplitúdou  $A$  a frekvenciou  $f$  ako má zdroj. Toto vlnenie dôjde k častici vo vzdialenosti  $x$  od zdroja (do bodu B) s časovým oneskorením  $\Delta t$  (obr. 4.7).

Výchylka častice v bode B bude závisieť od času rovnakým spôsobom ako výchylka zdroja vlnenia, ale časové oneskorenie vlnenia sa prejaví ako fázový posun na čase

$$u(x, t) = A \sin [\omega (t - \Delta t)]. \quad (6)$$

Vlnenie sa šíri v danom smere s konštantnou rýchlosťou  $v$ , preto môžeme vzdialenosť  $x$ , ktorú prejde vlna za dobu  $\Delta t$  do bodu B, vyjadriť ako dráhu pri rovnomernom priamočiarom pohybe v tvare

$$x = v\Delta t. \quad (7)$$



Obr.4.7

Z rovnice (7) sa vyjadri časové oneskorenie vlnenia  $\Delta t$ , ktoré sa dosadí do rovnice (6).

---

Potom pre výchylku častice v bode B dostaneme

$$u(x, t) = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (8)$$

Rovnica (8) vyjadruje **rovniciu postupnej vlny (výchylku častice vo vzdialenosti  $x$  v čase  $t$ )**, kde  $A$  je amplitúda vlnenia,  $\omega$  je uhlová frekvencia vlnenia a  $v$  je rýchlosť vlnenia. Argument funkcie sínus nazývame **fáza**.

---

Táto rovnica môže byť vyjadrená aj v iných tvaroch podľa toho, aké veličiny popisujúce vlnenie sú známe. Ak zavedieme **uhlové vlnové číslo** ako

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (k) = \text{m}^{-1}$$

potom táto rovnica nadobudne tvar

$$u(x, t) = A \sin (\omega t - kx) = A \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (9)$$

Rovnice rovinatej vlny (8) a (9) boli odvodené pre vlnu, ktorá sa šíri v kladnom smere osi  $x$ . Ak by sa vlna šírila v zápornom smere osi  $x$  rovnice by mali tvar

$$u(x, t) = A \sin \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \right], \quad (10)$$

$$u(x, t) = A \sin (\omega t + kx) = A \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (11)$$



*V prípade, že by zdroj vlnenia kmítal podľa funkcie kosínus, bola by výchylka častice vyjadrená v rovniciach (8) - (11) pomocou kosínusu.*

---

**Príklad 2:** Prostredím sa šíri vlnenie s výchylkou  $u(x, t) = 0,05 \sin(628t - 2x)$  (m). Určte amplitúdu, uhlovú frekvenciu, frekvenciu, vlnovú dĺžku, uhlové vlnové číslo, rýchlosť vlnenia a maximálnu rýchlosť častíc prostredia.

$$u(x, t) = 0,05 \sin(628t - 2x) \text{ (m)}$$

$$A = ? \quad \omega = ? \quad f = ? \quad \lambda = ? \quad k = ? \quad v = ? \quad v_{\check{c}, \max} = ?$$

Z porovnania danej výchylky vlnenia  $u(x, t) = 0,05 \sin(628t - 2x)$  s jej všeobecným zápisom v tvare  $u(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$  vyplýva, že

$$A = 0,05 \text{ m}, \quad \omega = 628 \text{ s}^{-1}, \quad k = 2 \text{ m}^{-1}.$$

Medzi uhlovou frekvenciou a frekvenciou platí vzťah  $\omega = 2\pi f$ , pomocou ktorého určíme frekvenciu

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628}{2\pi} = 100 \text{ Hz}.$$

Podľa vzťahu pre uhlové vlnové číslo je vlnová dĺžka

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = 3,14 \text{ m}.$$

Na vyjadrenie rýchlosti vlnenia použijeme vzťah (1)

$$v = \lambda f = 3,14 \cdot 100 = 314 \text{ m/s}.$$

Rýchlosť častice odvodíme ako prvú deriváciu výchylky (dráhy) vlnenia podľa času

$$v_{\check{c}} = \frac{du(x, t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx).$$

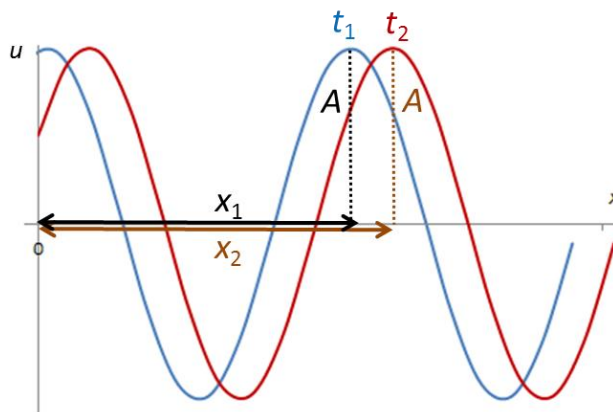
Z tohto vzťahu vyplýva, že hodnota rýchlosti častice závisí od člena  $\cos(\omega t - kx)$ . Rýchlosť častice bude maximálna, ak tento člen bude nadobúdať svoje maximum, t.j. bude rovný 1. Potom

$$v_{\check{c}, \max} = A\omega = 0,05 \cdot 628 = 31,4 \text{ m/s}.$$

**Amplitúda vlnenia je 0,05 m, uhlová frekvencia je  $628 \text{ s}^{-1}$ , uhlové vlnové číslo je  $2 \text{ m}^{-1}$ , frekvencia je 100 Hz a vlnová dĺžka vlnenia je 3,14 m. Rýchlosť, ktorou sa šíri vlna prostredím je 314 m/s. Maximálna rýchlosť, ktorou kmitajú častice prostredia, je 31,4 m/s.**

---

Z rovníc rovinatej vlny (8) – (11) vyplýva, že vlnenie postupuje prostredím. Výchylka častice je funkciou času  $t$ , ale aj vzdialenosti  $x$ . To znamená, že každá častica prostredia kmitá s amplitúdou  $A$  zdroja, ale túto amplitúdu dosahuje v inom časovom okamihu  $t$  vo vzdialenosti  $x$  od zdroja, čo potvrdzuje, že ide vlnenie postupuje prostredím.



Obr. 4.8

Na obr. 4.8 častica vo vzdialenosti  $x_1$  nadobúda amplitúdu zdroja v čase  $t_1$  a častica vo vzdialenosti  $x_2$  kmitajúca s rovnakou amplitúdou ju dosahuje v čase  $t_2$ . Táto situácia platí za ideálnych podmienok. Reálne sa amplitúda postupného vlnenia bude znižovať vplyvom odporu prostredia, až napokon vlna zanikne.

**Príklad 3:** Vlnenie sa šíri od zdroja rýchlosťou 300 m/s, jeho amplitúda je 5 cm a vlnová dĺžka 75 cm. Koľko času prejde od vzniku vlnenia po okamih, kedy častica nachádzajúca sa vo vzdialenosti 50 cm od zdroja sa vychýli o 2,5 cm? Zdrojom vlnenia sú kmity dané vzťahom  $u(0, t) = A \sin(\omega t)$ .

$$u(0, t) = A \sin(\omega t)$$

$$v = 300 \text{ m/s}$$

$$A = 0,05 \text{ m}$$

$$\lambda = 0,75 \text{ m}$$

$$x = 0,5 \text{ m}$$

$$u(x, t) = 0,025 \text{ m}$$

$$t = ?$$

Na vyjadrenie výchylky častice použijeme vzťah (9), pretože sú známe  $\lambda$ ,  $A$  a  $x$ . Do tohto vzťahu dosadíme  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Potom

$$u(x, t) = A \sin \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right).$$

Odtiaľ úpravou pre dobu  $t$ , za ktorú sa častica vychýli o 2,5 cm od zdroja

$$t = \frac{T}{2\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{x}{\lambda} \right],$$

kde periódu  $T$  vyjadríme pomocou vlnovej dĺžky použitím vzťahu (2). Potom pre hľadaný časový okamih

$$t = \frac{\lambda}{v} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{u}{A} \right) + \frac{x}{\lambda} \right].$$

Po číselnom dosadení



---

---

$$t = \frac{0,75}{300} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{0,025}{0,05} \right) + \frac{0,5}{0,75} \right] = 0,0019 \text{ s}$$

**Od vzniku vlnenia po okamih, kedy častica nachádzajúca sa vo vzdialenosti  $x = 50 \text{ cm}$  od zdroja sa vychýli o  $2,5 \text{ cm}$  prejde  $0,0019 \text{ s}$ .**

---

**Kontrolka 6:**

Výchylka zdroja vlnenia je daná rovnicou  $x = 5 \cos (2\pi t)$ . Vyberte správnu odpoveď. Rovnica rovinnej vlny, ktorá sa šíri v zápornom smere osi  $x$  rýchlosťou  $v$  bude daná

a)  $u(x,t) = 5 \sin (2\pi t - 2\pi x/v)$ ,

b)  $u(x,t) = 5 \cos (2\pi t - 2\pi x/v)$ ,

c)  $u(x,t) = 5 \cos (2\pi t + 2\pi x/v)$ ,

d)  $u(x,t) = 5 \sin (2\pi t + 2\pi x/v)$ .

[Odpoveď](#)



*Vlnenie sa môže šíriť zo zdroja nielen v jednom smere, ale sa šíri všetkými smermi. V takom prípade je výchylka vlnenia funkciou troch priestorových súradníc a času, t.j.  $u(x, y, z, t)$ .*

Príkladom postupného vlnenia je vlnenie v tvare kružníc, ktoré sa šíri v mláke po dopade kvapky dažďa. Rovnako aj zvukové vlny sa šíria ako postupné vlnenie, vďaka čomu je možné počuť hudbu z rádia v rôznych miestnostiach smeroch od neho.

## Otázky na zopakovanie:

1. Ako sa zapisuje výchylka zdroja vlnenia?
2. Ako sa líši zápis výchyliek postupného vlnenia, ktoré sa šíri v opačných smeroch osi  $x$ ?
3. Ako je vyjadrené uhlové vlnové číslo a akú má jednotku?
4. Ako je daná výchylka postupného vlnenia, ktorého zdroj má výchylku  $u = A \cos(\omega t)$ ?  
Vlnenie sa šíri v kladnom smere osi  $x$ , známe sú veličiny  $A$ ,  $x$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$ .
5. Vyjadrite výchylku postupného vlnenia vo vzdialenosti  $x$  od zdroja, ktoré sa šíri v zápornom smere osi  $x$  rýchlosťou  $v$ . Kmitanie zdroja má sínusový priebeh.
6. Výchylka postupného vlnenia je daná  $u(x, t) = 0,8 \sin \left[ 50\pi \left( t - \frac{0,3}{100} \right) \right]$  (m). Vyberte správnu odpoveď. Amplitúda je
  - a) 0,8 m,
  - b)  $50\pi$  m,
  - c) 0,3 m,
  - d) 100 m.
7. Výchylka postupného vlnenia je daná  $u(x, t) = 0,8 \sin \left[ 50\pi \left( t - \frac{0,3}{100} \right) \right]$  (m). Vyberte správnu odpoveď. Uhlová frekvencia je
  - a)  $0,8 \text{ s}^{-1}$ ,
  - b)  $50\pi \text{ s}^{-1}$ ,
  - c)  $0,3 \text{ s}^{-1}$ ,
  - d)  $100 \text{ s}^{-1}$ .
8. Výchylka postupného vlnenia je daná  $(x, t) = 0,8 \sin \left[ 50\pi \left( t - \frac{0,3}{100} \right) \right]$  (m). Vyberte správnu odpoveď.
  - a) vzdialenosť častice od zdroja je 0,3 m a rýchlosť vlny je  $50\pi \text{ m/s}$ ,
  - b) vzdialenosť častice od zdroja je 0,8 m a rýchlosť vlny je  $50\pi \text{ m/s}$ ,
  - c) vzdialenosť častice od zdroja je 0,3 m a rýchlosť vlny je  $100 \text{ m/s}$ ,
  - d) vzdialenosť častice od zdroja je 0,8 m a rýchlosť vlny je  $100 \text{ m/s}$ .

[Odpovede](#)

9. Doplňte tvrdenia:

- a) Pri postupnom vlnení častice prostredia kmitajú s rovnakou ....., ktorú dosahujú v inom ..... a v danom okamihu v inej ..... od zdroja.
- b) V rovnici  $u(x, t) = 2 \sin(3t - 8x)$  je 8 .....
- c) Ak zdroj vlnenia kmitá podľa rovnice  $(x, t) = 0,5 \cos(50t)$ , potom výchylka častice vo vzdialenosti 30 cm, do ktorej došlo vlnenie rýchlosťou 10 m/s v kladnom smere osi  $x$ , bude daná .....
- d) Zdroj vlnenia kmitá podľa funkcie kosínus. Ak vlnová dĺžka vlnenia je 50 cm, amplitúda vlnenia 2 cm a uhlová frekvencia  $20 \text{ s}^{-1}$  a vlnenie sa šíri v zápornom smere osi  $y$  potom výchylka častice je .....
- e) Vlnová dĺžka súvisí s uhlovým vlnovým číslom podľa vzťahu .....
- f) Výchylka častice pri postupnom vlnení je funkciou ..... a .....
10. Vysvetlite, čo sa bude diať s napnutým lanom, keď jedným jeho koncom kmitnete párkrát nahor a nadol?
11. Určte amplitúdu, periódu, frekvenciu, vlnovú dĺžku a rýchlosť šírenia vlnenia, ktoré je dané rovnicou  $u(x, t) = 0,5 \sin 2\pi(10t - 5x)$  (m).
12. Netlmené kmity dané vzťahom  $u(0, t) = 5 \sin(8\pi t)$  (cm) sú zdrojom vlnenia. Rýchlosť šírenia vlnenia je  $v = 100 \text{ m.s}^{-1}$ . Aká je okamžitá výchylka častice z rovnovážnej polohy v bode, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti  $r = 7,5 \text{ m}$  od zdroja vlnenia, v čase  $t = 3 \text{ s}$  od začiatku kmitania zdroja?
13. Rovinná vlna je popísaná vzťahom  $u(r, t) = 5 \sin(25t - 5r)$  (cm). Vypočítajte maximálnu hodnotu rýchlosti kmitania častíc prostredia a jej pomer k rýchlosti šírenia vlnenia.
14. Rovinná vlna je vyjadrená v tvare  $u(r, t) = 4 \cos(150t - 2,5r)$  (m). Nájdite pomer amplitúdy výchylky a vlnovej dĺžky.
15. Hmotný bod vo vzdialenosti 4 cm od zdroja vlnenia má v čase  $t = T/3$  výchylku rovnú polovici amplitúdy. Nájdite vlnovú dĺžku postupujúcej vlny. Zdrojom vlnenia sú kmity dané vzťahom  $u(0, t) = A \cos(\omega t)$ .

[Odpovede](#)

## 4.4 Skladanie vlnení

**Kľúčové slová:** skladanie (interferencia), princíp superpozície, výsledná výchylka, amplitúda výsledného vlnenia, dráhový rozdiel, úplne konštruktívna interferencia, čiastočná interferencia, úplne deštruktívna interferencia

### Zopakujte si:

Čo je zdrojom vlnenia?

Ako sa šíri postupné vlnenie?

Ako je daná rovnica postupného vlnenia vyjadrená pomocou uhlového vlnového čísla?

Ako je definované uhlové vlnové číslo?

Aký výraz predstavuje fázu vlnenia?

Kedy funkcia kosínus nadobúda svoje maximum a kedy svoje minimum?

Doteraz sme sa zaoberali šírením jedného vlnenia v prostredí. Reálne sa môže šíriť prostredím viacero vlnení. Zaujímavá situácia nastane, ak jedným miestom prechádza viac vlnení naraz. Vtedy dochádza ku skladaniu vlnení tzv. interferencii. Napríklad na koncerte symfonického orchestra do nášho ucha vstupujú naraz zvuky (vlnenia) z viacerých nástrojov napr. z huslí, flauty, bubna či trúbky.

**Skladanie vlnenia (interferencia)** je fyzikálny jav, ktorý nastane, ak dve alebo viacero vlnení z rôznych zdrojov prechádza tým istým miestom v rovnakom časovom okamihu. Potom v oblasti, kde sa vlnenia prekrývajú dochádza ku skladaniu. Na nasledujúcom obrázku dochádza k skladaniu vlnení za kačicami na jazere.

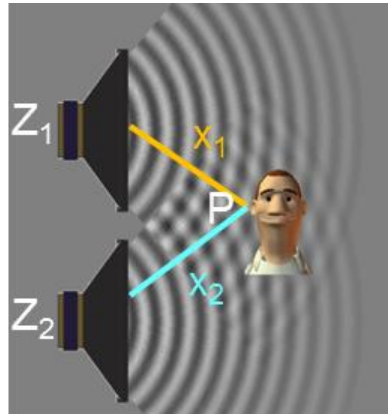


Pri skladaní platí **princíp superpozície**, ktorý hovorí, že ak dve vlnenia prechádzajú tým istým miestom v tom istom časovom okamihu, potom

- výsledná výchylka sa rovná súčtu jednotlivých výchyliek,

- vzniká vlnenie s jednou vlnou,
- sčítavajúce sa vlnenia sa navzájom neovplyvňujú.

Uvažujme dva zdroje  $Z_1$ ,  $Z_2$  (napr. membrány dvoch reproduktorov), ktoré kmitajú rovnakým smerom, s rovnakou frekvenciou ( $f_1 = f_2 = f$ ), s rôznymi amplitúdami ( $A_1 \neq A_2$ ) a s rovnakými fázami (obr. 4.9). Takéto zdroje nazývame **koherentné zdroje**. Zo zdrojov  $Z_1$ ,  $Z_2$  sa šíria vlny, ktoré vychylujú častice prostredia z rovnovážnych polôh. Bude nás zaujímať, aká je výsledná výchylka častice v bode P (v uchu poslucháča), ktorá vznikne skladaním výchyliek jednotlivých vlnení.



Obr. 4.9

**Aplet** Pozrite aplet na skladanie vlnení na adrese:  
<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/sound>

Rovnica popisujúca výchylku vyvolanú prvým vlnením, ktorého zdroj  $Z_1$  sa nachádza vo vzdialenosti  $x_1$  od bodu P, je daná

$$u_1(x_1, t) = A_1 \sin(\omega t - kx_1). \quad (12)$$

Rovnica popisujúca výchylku vyvolanú druhým vlnením, ktorého zdroj  $Z_2$  sa nachádza vo vzdialenosti  $x_2$  od bodu P, je daná

$$u_2(x_2, t) = A_2 \sin(\omega t - kx_2). \quad (13)$$

V bode P dochádza ku skladaniu vlnení. Výsledná výchylka sa určí ako súčet výchyliek vyvolaných jednotlivými vlneniami, podľa princípu superpozície

$$u(x, t) = u_1(x_1, t) + u_2(x_2, t).$$

Za jednotlivé výchylky dosadíme vzťahy (12) a (13), ich úpravou pre výslednú výchylku

$$u(x, t) = A_1 \sin \omega t \cos kx_1 - A_1 \cos \omega t \sin kx_1 + A_2 \sin \omega t \cos kx_2 - A_2 \cos \omega t \sin kx_2.$$



Pri úprave vzťahov pre výchylky sme použili súčtový vzorec z matematiky v tvare  
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ .

Upravíme

$$u(x, t) = \sin \omega t (A_1 \cos kx_1 + A_2 \cos kx_2) - \cos \omega t (A_1 \sin kx_1 + A_2 \sin kx_2).$$

a zavedieme substitúcie

$$A \cos kx = A_1 \cos kx_1 + A_2 \cos kx_2, \quad (*)$$

$$A \sin kx = A_1 \sin kx_1 + A_2 \sin kx_2. \quad (**)$$

---

Potom pre **výslednú výchylku** častice v bode P môžeme písať

$$u(x, t) = A \cos kx \sin \omega t - A \sin kx \cos \omega t = A \sin (\omega t - kx), \quad (14)$$

kde

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos kx} \quad (15)$$

predstavuje **amplitúdu** výsledného vlnenia a výraz  $x = x_1 - x_2$  je **dráhový rozdiel vlnení**.

---



*Pri úprave vzťahu pre výslednú výchylku bol použitý súčtový vzorec z matematiky v tvare  $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha - \beta)$ .*

Vzťah (14) vyjadruje rovnicu výsledného vlnenia, ktoré vzniklo skladaním dvoch vlnení v bode P. Z tohto vzťahu vyplýva, že výsledné vlnenie je postupné vlnenie a má sínusový priebeh. Zápis výslednej výchylky je podobný ako zápis výchýliek jednotlivých vlnení a má v argumente sínusu výraz  $(\omega t - kx)$ , ktorý je typický pre postupné vlnenie. Okrem toho má výsledné vlnenie rovnakú frekvenciu ako skladané vlnenia, ale inú amplitúdu.

### **Kontrolka 7:**

Vyberte správnu odpoveď: Pri skladaní dvoch vlnení z koherentných zdrojov vznikne

- a) postupné vlnenie s inou frekvenciou ako mali skladané vlnenia,
- b) postupné vlnenie s rovnakou amplitúdou ako mali skladané vlnenia,
- c) postupné vlnenie s rovnakou frekvenciou ako mali skladané vlnenia.

[Odpoveď](#)

**Príklad 5:** Odvodte vzťah pre amplitúdu výsledného vlnenia, ak výchylky skladajúcich vlnení sú dané  $u_1(x_1, t) = A_1 \sin(\omega t - kx_1)$ ,  $u_2(x_2, t) = A_2 \sin(\omega t - kx_2)$ . Vypočítajte hodnotu výslednej amplitúdy, ak  $A_1 = 3 \text{ cm}$ ,  $A_2 = 4 \text{ cm}$  a  $kx = 60^\circ$ .

$$u_1(x_1, t) = A_1 \sin(\omega t - kx_1)$$

$$u_2(x_2, t) = A_2 \sin(\omega t - kx_2)$$

$$\underline{A_1 = 3 \text{ cm}, A_2 = 4 \text{ cm}, kx = 60^\circ}$$

$$A = ?$$

Pri odvodení výslednej amplitúdy použijeme vzťahy (\*) a (\*\*), ktoré sme zaviedli pri odvodení výslednej výchylky. Pri ich úprave budeme postupovať tak, že ich pravé aj ľavé strany umocníme na druhú a potom jednotlivé strany sčítame. Pre jednotlivé rovnice

$$(A \cos kx)^2 = (A_1 \cos kx_1 + A_2 \cos kx_2)^2$$

$$(A \sin kx)^2 = (A_1 \sin kx_1 + A_2 \sin kx_2)^2.$$

Po umocnení oboch rovníc platí

$$(A \cos kx)^2 = A_1^2 \cos^2 kx_1 + 2A_1 A_2 \cos kx_1 \cos kx_2 + A_2^2 \cos^2 kx_2$$

$$(A \sin kx)^2 = A_1^2 \sin^2 kx_1 + 2A_1 A_2 \sin kx_1 \sin kx_2 + A_2^2 \sin^2 kx_2 .$$



*Pri úprave pravých strán bol použitý vzorec z matematiky  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .*

Po sčítaní pravých a ľavých strán rovníc dostaneme rovnicu

$$A^2(\cos^2 kx + \sin^2 kx) = A_1^2(\cos^2 kx_1 + \sin^2 kx_1) + 2A_1 A_2(\cos kx_1 \cos kx_2 + \sin kx_1 \sin kx_2) + A_2^2(\cos^2 kx_2 + \sin^2 kx_2),$$

Po úprave pre amplitúdu

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[k(x_1 - x_2)].$$



*Pri úprave člena  $2A_1 A_2(\cos kx_1 \cos kx_2 + \sin kx_1 \sin kx_2)$  bol použitý súčtový vzorec z matematiky v tvare  $\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$ .*

Odtiaľ

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[k(x_1 - x_2)]} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos kx}.$$

Dosadením číselných hodnôt pre amplitúdu výsledného vlnenia

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ} = 6,083 \text{ cm}$$

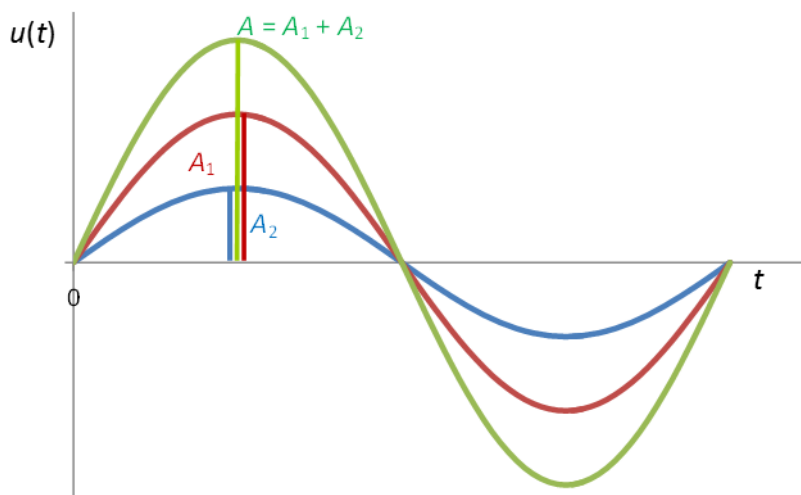
**Amplitúda výsledného vlnenia, ktoré vzniklo skladaním, je 6,083 cm.**

Zo vzťahu (15) vyplýva, že amplitúda výsledného vlnenia  $A$  závisí od amplitúd jednotlivých skladaných vlnení  $A_1, A_2$  a od hodnoty  $\cos kx$ . Častica v bode P môže kmitať s amplitúdou, ktorá bude maximálna alebo minimálna, prípadne bude nadobúdať hodnotu medzi týmito dvomi hodnotami.

Maximum amplitúdy budeme v bode P pozorovať, ak  $\cos kx = 1$ . Potom výsledná amplitúda bude  $A = A_1 + A_2$  (obr. 4.10). To nastane vtedy, ak dráhový rozdiel  $x_1 - x_2$  bude rovný celočíselnému násobku vlnovej dĺžky skladaných vlnení. Vyplýva to z podmienky pre funkciu kosínus, ktorá dosahuje maximum, ak pre dráhový rozdiel platí  $kx = 2n\pi$ . Úpravou dostaneme

$$x = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda,$$

kde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . V tomto prípade sú skladajúce sa vlnenia vo fáze.



Obr. 4.10

Amplitúda v bode P bude minimálna, ak  $\cos kx = -1$ , potom pre ňu platí  $A = |A_1 - A_2|$  (obr. 4.11). Táto situácia nastane, ak  $kx = (2n + 1)\pi$ . Po úprave

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{k} = \frac{(2n+1)\pi}{k} \frac{2}{2} = (2n + 1) \frac{\lambda}{2},$$

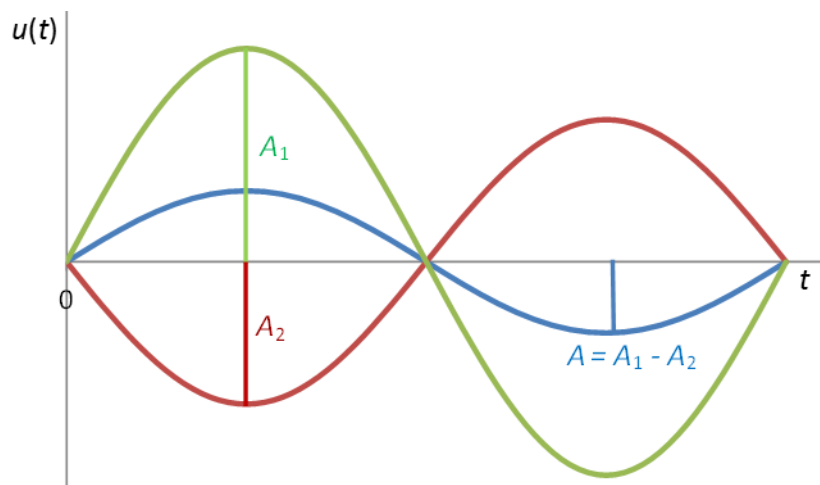
pre  $n = 0, 1, 2, \dots$ .



*Pri úprave sme použili poznatok, že  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , preto sa rovnica pri úprave súčasne násobila a delila 2.*

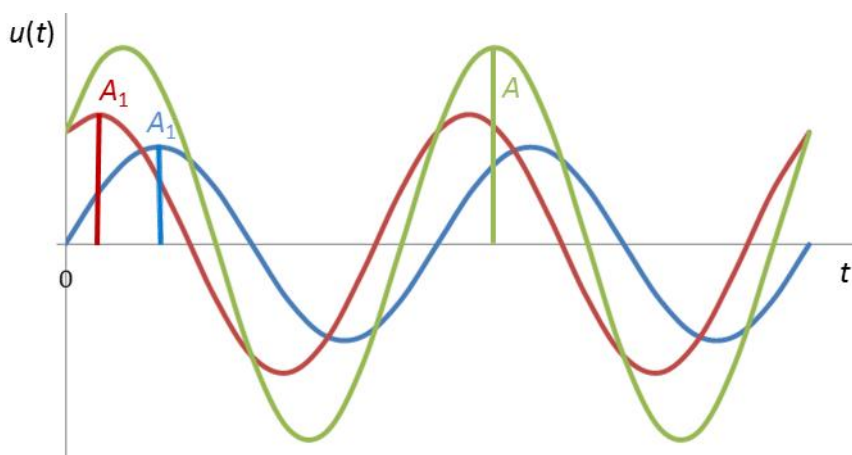
Ak dráhový rozdiel  $x_1 - x_2$  bude rovný nepárnemu násobku polovičky vlnovej dĺžky, potom je výsledná amplitúda minimálna. V tomto prípade skladajúce sa vlnenia majú opačnú fázu. V oboch spomenutých prípadoch hovoríme o **častočnej interferencii**.





Obr. 4.11

V prípade, že skladajúce sa vlnenia nie sú vo fáze ani nemajú opačnú fázu, je amplitúda vlnenia v bode P daná vzťahom (15), táto situácia je zobrazená na obr. 4.12.



Obr. 4.12

**Kontrolka 8:**

Vyberte správne odpovede: Ak dráhový rozdiel  $x_1 - x_2 = 2\lambda$ , potom

- a) výsledné vlnenie bude mať maximálnu amplitúdu,
- b) výsledné vlnenie bude mať minimálnu amplitúdu,
- c) výsledná amplitúda bude daná  $A = |A_1 - A_2|$ ,
- d) výsledná amplitúda bude daná  $A = A_1 + A_2$ .

[Odpoveď](#)

---

**Príklad 6:** Dokážte, že skladajúce sa vlnenia sú vo fáze, ak ich dráhový rozdiel sa rovná  $n$  – násobku vlnovej dĺžky  $\lambda$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

$$(x_1 - x_2) = n\lambda$$
$$\Delta\varphi = ?$$

Označme  $\varphi_1$  fázu prvého vlnenia a  $\varphi_2$  fázu druhého vlnenia. Potom z rovníc (12) a (13) vyplýva, že  $\varphi_1 = \omega t - kx_1$  a  $\varphi_2 = \omega t - kx_2$ .

Pre fázový rozdiel môžeme písať

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t - kx_2 - (\omega t - kx_1).$$

Úpravou dostaneme

$$\Delta\varphi = k(x_1 - x_2) = kx.$$

Dosadením  $x = n\lambda$  a použitím vzťahu  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , vychádza

$$\Delta\varphi = n2\pi, \text{ pre } n = 0, 1, 2, \dots$$

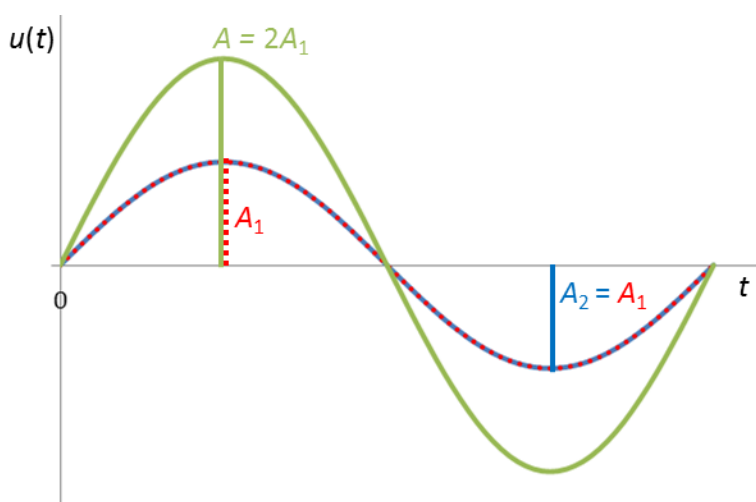
Z matematiky vyplýva, že dve harmonické funkcie sú vo fáze, ak rozdiel ich fáz je rovný  $0, 2\pi, 4\pi, \dots$ .

Výsledok, ktorý sme dostali je vyjadrením tohto poznatku.

**Dokázali sme, že skladajúce sa vlnenia sú vo fáze, ak ich dráhový rozdiel sa rovná  $n$  – násobku vlnovej dĺžky  $\lambda$ .**

---

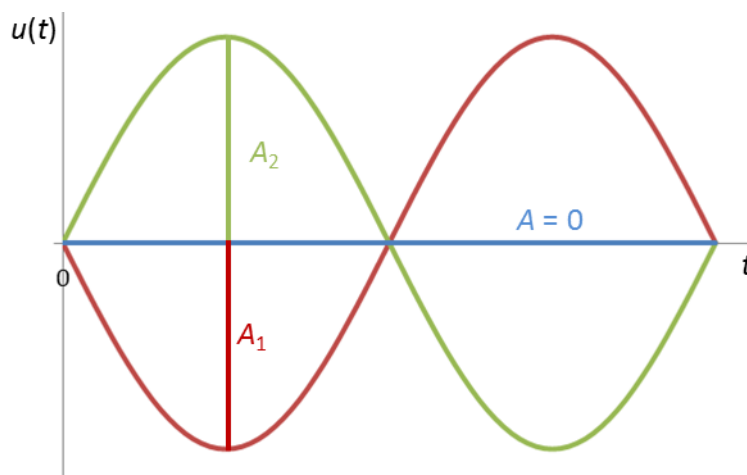
Ak by skladajúce vlnenia mali navyše rovnakú amplitúdu  $A_1 = A_2$ , môže nastať úplne konštruktívna alebo úplne deštruktívna interferencia.



Obr. 4.13

V prípade, že skladané vlnenia sú vo fáze, nastáva **úplne konštruktívna interferencia**. Z podmienky pre maximum amplitúdy vyplýva, že maximálna amplitúda bude daná  $A = 2A_1$ . Grafické zobrazenie výslednej výchylky je na obr. 4.13

Ak skladané vlnenia majú opačnú fázu, výsledná amplitúda bude minimálna a rovná  $A = A_1 - A_1 = 0$ . Dôjde k zaniknutiu vlnenia, k tzv. **úplne deštruktívnej interferencii**. Grafické zobrazenie výslednej výchylky pri úplnej deštruktívnej interferencii je na obr. 4.14.



Obr. 4.14

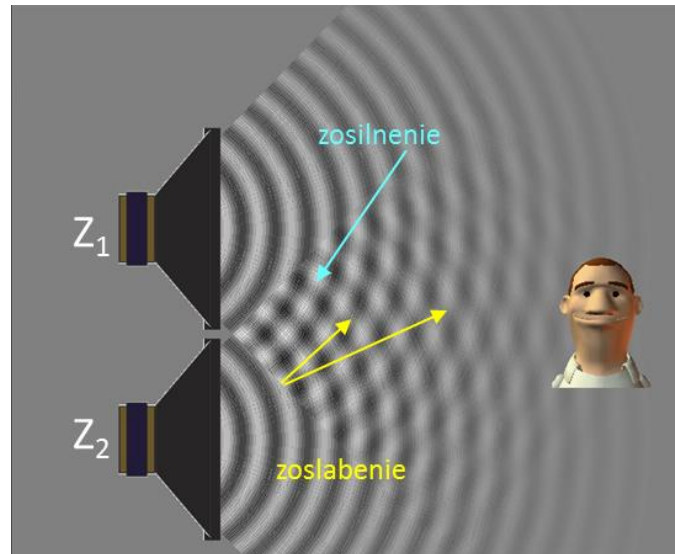
### Kontrolka 9:

Vyberte správne odpovede: Pri skladaní dvoch vlnení z koherentných zdrojov s amplitúdami  $A_1 = 3A_2$ , v prípade, keď sú vlnenia vo fáze

- a) dôjde k úplne konštruktívnej interferencii,
- b) výsledná amplitúda bude daná  $A = A_1 - 3A_2$ ,
- c) dôjde k čiastočnej interferencii,
- d) výsledná amplitúda bude daná  $A = 4A_2$ .

[Odpoveď](#)

K skladaniu vlnení nedochádza len v bode P, ale v ľubovoľnom mieste oblasti, kde sa vlnenia prekrývajú (obr. 4.15). V niektorých miestach je výsledné vlnenie zosilnené, častice prostredia v týchto bodoch kmitajú s maximálnou amplitúdou. V iných miestach je vlnenie zoslabené, častice kmitajú s minimálnou amplitúdou. Pre maximum a minimum amplitúdy v týchto bodoch platia tie isté podmienky ako boli popísané pre bod P.



Obr. 4.15

Na obr. 4.15 pozorujeme maximálnu amplitúdu (striedajúce sa biele a čierne miesta) a minimálnu amplitúdu (sivé miesta).



Pozrite video na interferenciu vlnení na vodnej hladine od časového okamihu 2:04 min:

<http://www.fch.vut.cz/lectures/video/> - video: P16c\_Vlneni\_na\_vodni\_hladine.mpg

**Aplet**

Pozrite aplet na skladanie vlnení na adrese:

[http://www.walter-fendt.de/html5/phcz/interference\\_cz.htm](http://www.walter-fendt.de/html5/phcz/interference_cz.htm)

## Otázky na zopakovanie:

1. Čo rozumieme pod pojmom interferencia?
2. Čo hovorí princíp superpozície?
3. Ako sa určí výsledná výchylka vlnenia, ktoré vznikne skladaním dvoch vlnení?
4. Vysvetlite pojem koherentné zdroje.
5. Vlnenie vzniklo skladaním dvoch vlnení, ktoré sa šírili z dvoch koherentných zdrojov.
  - a) Ako je daná výsledná výchylka? Od čoho závisí?
  - b) Aká je amplitúda výsledného vlnenia? Je konštantná? Od čoho závisí?
  - c) Aký musí byť  $\cos kx$ , aby výsledná amplitúda bola minimálna (maximálna)?
  - d) Pri akom dráhovom rozdiel pozorujeme čiastočnú interferenciu, pri ktorej je amplitúda maximálna?
  - e) Kedy nastane úplne konštruktívna a úplne deštruktívna interferencia?
6. Vysvetlite, prečo pri vysielaní rozhlasu na námestí z viacerých reproduktorov, ktoré sú napájané z jedného zdroja, je zvuk v niektorých miestach zosilnený a v iných ho takmer nepočuť?
7. Pomocou vzťahu (15) pre výslednú amplitúdu dokážte, že v prípade čiastočnej interferencie
  - a)  $A = A_1 + A_2$ , ak sú skladajúce sa vlnenia vo fáze,
  - b)  $A = |A_1 - A_2|$ , ak skladajúce sa vlnenia majú opačnú fázu.
8. Dokážte, že skladajúce sa vlnenia majú opačnú fázu, ak ich dráhový rozdiel sa rovná nepárnemu násobku polovice vlnovej dĺžky  $\lambda$ . Pomôžte si príkladom 6.
9. Doplňte tvrdenia:
  - a) Skladanie vlnení nastáva, ak dve vlnenia prechádzajú ..... miestom v ..... čase.
  - b) Pri skladaní dvoch vlnení vzniká ..... vlnenie.
  - c) Výsledné vlnenie, ktoré vznikne skladaním dvoch postupných vlnení v rovnakom smere bude ..... vlnenie.
  - d) Výchylka výsledného vlnenia závisí od ..... a .....
  - e) Dráhový rozdiel je daný vzťahom .....

[Odpovede](#)

- f) Amplitúda výsledného vlnenia je daná vzťahom .....
- g) Výsledná amplitúda bude maximálna, keď  $\cos kx = \dots\dots\dots$  .
- h) Výsledná amplitúda bude minimálna, keď  $\cos kx = \dots\dots\dots$
10. Vyberte správnu odpoveď: Výsledná amplitúda bude  $A = A_1 + A_2$
- a) v prípade úplne konštruktívnej interferencie,
  - b) v prípade čiastočnej interferencie,
  - c) v prípade úplne deštruktívnej interferencie.
11. Vyberte správnu odpoveď: Výsledná amplitúda bude  $A = 2A_1$
- a) v prípade úplne konštruktívnej interferencie,
  - b) v prípade čiastočnej interferencie,
  - c) v prípade úplne deštruktívnej interferencie.
12. Vyberte správnu odpoveď: Výsledná amplitúda bude  $A = A_1 - A_2$
- a) v prípade úplne konštruktívnej interferencie,
  - b) v prípade čiastočnej interferencie,
  - c) v prípade úplne deštruktívnej interferencie.
13. Vyberte správnu odpoveď: Výsledná amplitúda bude  $A = 0$
- a) v prípade úplne konštruktívnej interferencie,
  - b) v prípade čiastočnej interferencie,
  - c) v prípade úplne deštruktívnej interferencie.
14. Vyberte správnu odpoveď: Ak sú skladané vlnenia vo fáze a  $A_1 \neq A_2$ , potom výsledná amplitúda bude
- a) maximálna,
  - b) minimálna,
  - c) polovičná,
  - d) tretinová.

[Odpovede](#)

15. Vyberte správne odpovede: Ak  $x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$ , potom vlnenia

- a) sú vo fáze,
- b) majú opačnú fázu,
- c) výsledné vlnenie bude mať maximálnu amplitúdu,
- d) výsledné vlnenie bude mať minimálnu amplitúdu.

16. Vyberte správnu odpoveď: Výchylka výsledného vlnenia je daná

- a)  $u(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx_1)$ ,
- b)  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos kx}$ ,
- c)  $A = A_1 + A_2$ ,
- d)  $u(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$ .

17. Sú dané  $A_1 = 3 \text{ cm}$ ,  $A_2 = 5 \text{ cm}$ . Určte výslednú amplitúdu

- a) ak  $x_1 - x_2 = \frac{3\lambda}{2}$ ,
- b) ak  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0^\circ$ ,
- c) ak  $\varphi_1 - \varphi_2 = 50^\circ$ .

[Odpovede](#)

## 4.5 Stojaté vlnenie

**Kľúčové slová:** stojaté vlnenie, výchylka stojatého vlnenia, amplitúda stojatého vlnenia, uzly, kmitne, vzdialenosť kmitní

### Zopakujte si:

Ako je daná výchylka netlmeného kmitavého harmonického pohybu?

Ako sa šíri postupné vlnenie?

Ako je daná rovnica postupného vlnenia vyjadrená pomocou uhlového vlnového čísla?

Ako sa líšia zápisy výchylky postupných vln šíriacich sa v opačnom smere osi  $x$ ?

Čo hovorí princíp superpozície?

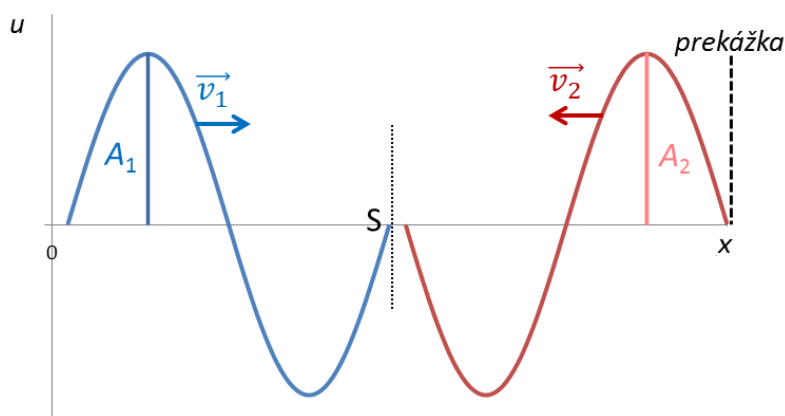
Kedy dochádza ku skladaniu vlnenia?

Pri akej podmienke je  $\cos x = 1$  alebo  $\cos x = 0$ ?

Poznáme princíp vzniku postupného vlnenia a ako je daná jeho výchylka. V tejto časti vysvetlíme ako vzniká stojaté vlnenie a ukážeme ako sa líši od postupného vlnenia.

**Stojaté vlnenie** vzniká skladaním (interferenciou) dvoch vlnení postupujúcich oproti sebe s rovnakou frekvenciou, v zjednodušenom prípade aj s rovnakou amplitúdou a rýchlosťou.

Táto situácia môže nastať, ak postupné vlnenie narazí na prekážku a odrazí sa od nej opačným smerom. Predpokladajme, že zo zdroja vlnenia sa šíri vlna v kladnom smere osi  $x$  s amplitúdou  $A_1$ , frekvenciou  $f_1$  a rýchlosťou  $v_1$ . Po určitom čase narazí na pevnú prekážku a odrazí sa od nej s opačnou fázou. Oproti pôvodnej vlne sa začne šíriť v zápornom smere osi  $x$  vlna, ktorá bude mať rovnakú amplitúdu ( $A_1 = A_2 = A$ ), rovnakú frekvenciu ( $f_1 = f_2 = f$ ) a rovnakú rýchlosť ( $v_1 = v_2 = v$ ) ako pôvodná vlna.



Obr. 4.16



Tieto dve vlnenia sa budú skladať do výsledného vlnenia, ktorého výchylka v bode S nás bude zaujímať (obr. 4.16). Kvôli prehľadnosti je každé z vlnení znázornené len jednou vlnou.

Pre výchylku prvého vlnenia platí

$$u_1(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (16)$$

výchylka druhého (odrazeného) vlnenia je daná

$$u_2(x, t) = A \sin(\omega t + kx). \quad (17)$$

Výchylka výsledného vlnenia sa určí ako súčet výchýliek pôvodného a odrazeného vlnenia podľa princípu superpozície

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

kde za jednotlivé výchylky dosadíme vzťahy (16) a (17). Úpravou dostaneme

$$u(x, t) = A \sin \omega t \cos kx - A \cos \omega t \sin kx + A \sin \omega t \cos kx + A \cos \omega t \sin kx.$$



*Pri úprave jednotlivých výchýliek sme použili súčtové vzorce z matematiky v tvare  $\sin(\alpha \mp \beta) = \sin \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \sin \beta$ .*

---

Potom **výchylka výsledného vlnenia** je daná

$$u(x, t) = 2A \cos kx \sin \omega t = C \sin \omega t, \quad (18)$$

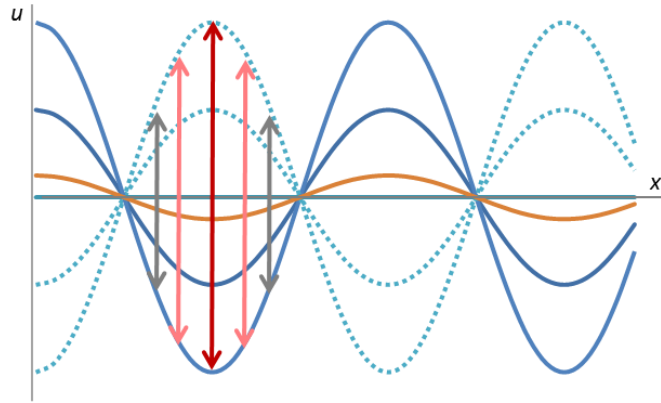
kde výraz

$$C = 2A \cos kx \quad (19)$$

predstavuje **amplitúdu výsledného vlnenia**.

---

Zo vzťahu (18) vyplýva, že výsledné vlnenie nie je postupné vlnenie. V argumente sínusu nie je výraz  $(\omega t - kx)$ , ktorý je typický pre postupné vlnenie. Vlnenie, ktoré vzniklo nazývame **stojaté vlnenie**, ale v podstate ide o kmitanie bodov (častíc prostredia) v danom mieste okolo svojich rovnovážnych polôh (obr. 4.17). **Výchylka stojatého vlnenia** daná vzťahom (18) sa podobá na výchylku kmitavého pohybu. Zo vzťahu (19) vyplýva, že častice prostredia nekmitajú s rovnakou amplitúdou. Každá častica bude vo svojej vzdialenosti  $x$  kmitať s inou amplitúdou nezávisle od času (člen  $\cos kx$  v tomto vzťahu nezávisí od  $t$ ). Vzťah (19) predstavuje **amplitúdu stojatého vlnenia**.



Obr. 4.17

### Kontrolka 10:

Vyberte správnu odpoveď: Skladaním dvoch vlnení postupujúcich oproti sebe s amplitúdou  $A = 0,05$  m a frekvenciou  $f = 50$  Hz vzniklo stojaté vlnenie. Výchylka výsledného vlnenia bude popísaná rovnicou

a)  $u(x, t) = 0,1 \cos kx \sin 100 \pi t,$

b)  $u(x, t) = 0,05 \cos kx \sin 50 \pi t,$

c)  $u(x, t) = 0,1 \cos kx \sin 50 \pi t.$

[Odpoveď](#)

Maximálna výchylka častíc prostredia je určená výrazom  $\cos kx$ . Existujú miesta na osi  $x$ , ktoré budú počas svojho kmitania dosahovať maximálnu výchylku  $C = 2A$ . Tieto body nazývame kmitne.

V prípade kmitní je  $\cos kx = \pm 1$ . Potom pre polohu bodov, ktoré budú kmitať ako kmitne, platí podmienka  $kx = n\pi$ . Odtiaľ úpravou

$$x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{2\pi}{k} \frac{1}{2},$$

potom pre **polohu kmitní**

$$x = n \frac{\lambda}{2}, \tag{20}$$

kde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Podľa (20) kmitne sú body, ktoré kmitajú s maximálnou amplitúdou a nachádzajú sa vo vzdialenosti rovnej  $n$ -násobku polovice vlnovej dĺžky.

Na osi  $x$  pri stojatom vlnení budú aj body, ktoré nebudú vôbec kmitať. Tie nazývame uzly. Platí pre ne  $C = 0$  pretože  $\cos kx = 0$ . Pri odvodení vzdialenosti týchto bodov vychádzame z podmienky  $kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ . Úpravou

$$x = (2n + 1) \frac{\pi}{2k} = (2n + 1) \frac{1}{2} \frac{2\pi}{k} \frac{\lambda}{4},$$

pre **polohu uzlov**

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (21)$$

Uzly sú body, ktoré nekmitajú a nachádzajú sa v  $(2n+1)$  - násobkoch štvrtiny vlnovej dĺžky.



Pri úprave vzťahov (20) a (21) sme použili poznatok, že  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , preto sa rovnice pri úprave súčasne násobili a delili členom  $2\lambda$  alebo 2.

**Aplet**

Pozrite aplet na stojaté vlnenie zo zdroja:

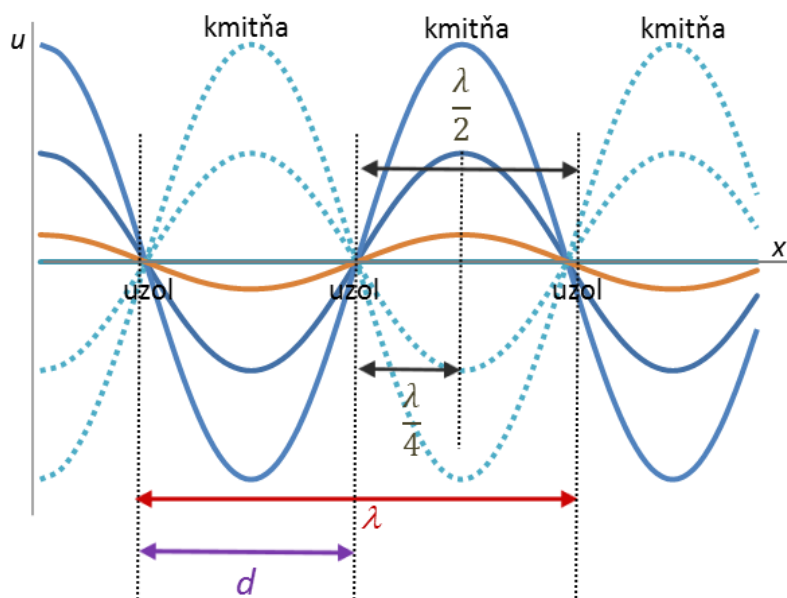
[http://www.gymza.sk/gymza/predmety/fyzika/web\\_fyzika/Stojate\\_vlnenie/standingwaves.html](http://www.gymza.sk/gymza/predmety/fyzika/web_fyzika/Stojate_vlnenie/standingwaves.html)

Z obr. 4.18 vyplýva, že vzdialenosť dvoch kmitní (uzlov) je

$$d = \frac{\lambda}{2}. \quad (22)$$

Túto vzdialenosť je možné odvodiť nasledovným postupom. Pomocou vzťahu (20) sa vyjadří vzdialenosť  $(n+1)$ -vej a  $n$ -tej kmitne. Potom pre vzdialenosť kmitní

$$d = (n + 1) \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$



Obr. 4.18

---

**Príklad 7:** Skladaním dvoch proti sebe postupujúcich vlnení s vlnovou dĺžkou 0,4 m a amplitúdou 0,3 m vzniklo stojaté vlnenie. Určte, v akej vzdialenosti od zdroja sa nachádza

a) prvá a tretia kmitňa,

b) druhý uzol.

Aká bude amplitúda častíc prostredia vo vzdialenosti (0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2) m.

$$\lambda = 0,4 \text{ m}$$

$$A = 0,3 \text{ m}$$

a)  $x_n = ?$  (prvá a tretia kmitňa)

b)  $x_n = ?$  (druhý uzol)

$C_n = ?$   $x = 0 \text{ m}, 0,05 \text{ m}, 0,1 \text{ m}, 0,15 \text{ m}, 0,2 \text{ m}$

a) Pre vzdialenosť častíc prostredia, ktoré kmitajú ako kmitne platí  $x = n \frac{\lambda}{2}$  (1). Pre prvú kmitňu  $n = 0$ , pre tretiu  $n = 2$ . Potom dosadením do vzťahu (1) pre vzdialenosť kmitní

$$x_0 = n \frac{\lambda}{2} = 0 \text{ m}, \quad x_2 = n \frac{\lambda}{2} = 2 \frac{0,4}{2} = 0,4 \text{ m}$$

**Prvá kmitňa sa nachádza vo vzdialenosti 0 m od zdroja. Tretia kmitňa je vo vzdialenosti 0,4 m.**

b) Pre vzdialenosť častíc prostredia, ktoré kmitajú ako uzly platí  $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$  (2). Pre druhý uzol  $n = 1$ . Potom dosadením do vzťahu (2) pre vzdialenosť druhého uzla

$$x_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} = (2 \cdot 1 + 1) \frac{0,4}{4} = 0,3 \text{ m}$$

**Druhý uzol je vo vzdialenosti 0,3 m od zdroja.**

Amplitúdu častíc v rôznych vzdialenostiach od zdroja určíme pomocou vzťahu

$C = 2A \cos kx$ , kde za uhlové vlnové číslo dosadíme  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Potom

$C_x = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 2 \cdot 0,3 \cos \frac{2\pi}{0,4} x$  (3). Dosadením za  $x$  do vzťahu (3) pre jednotlivé vzdialenosti

$$C_0 = 0,6 \text{ m}, C_{0,05} = 0,42 \text{ m}, C_{0,1} = 0 \text{ m}, C_{0,15} = -0,42 \text{ m}, C_{0,2} = -0,6 \text{ m}.$$

Amplitúda  $C_0$  pripadá prvej kmitni vo vzdialenosti  $x = 0 \text{ m}$ ,  $C_0 = 2A = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ m}$ . Amplitúda  $C_{0,2}$  prislúchajúca druhej kmitni, je najväčšia, ale má opačnú fázu ako 1. kmitňa, preto má zápornú hodnotu. Amplitúda  $C_{0,1}$  patrí prvému uzlu. Amplitúda bodu, ktorý kmitá medzi prvou kmitňou a prvým uzlom s rovnakou fázou je  $C_{0,05}$ . Bod, ktorý kmitá medzi prvým uzlom a druhou kmitňou je  $C_{0,15}$ , jeho fáza je opačná ako má bod s amplitúdou  $C_{0,05}$ .

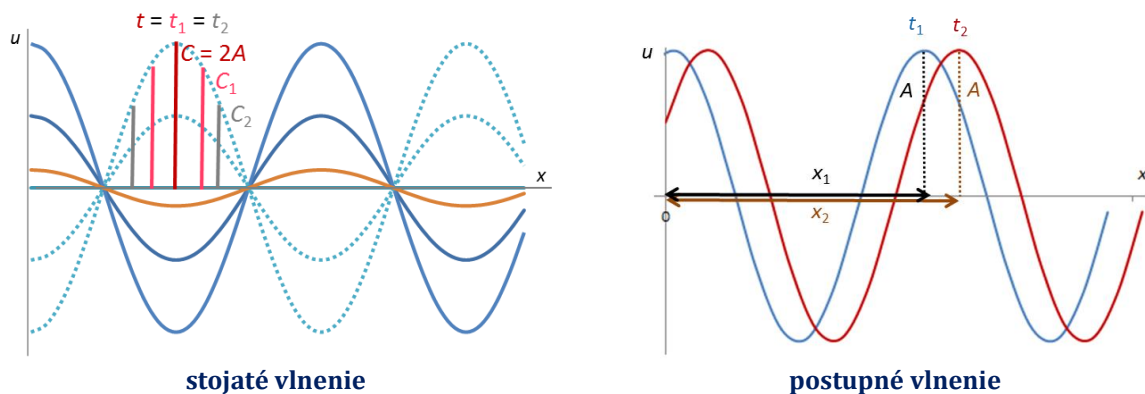
**Amplitúdy častíc v daných vzdialenostiach od zdroja sú**

$$C_0 = 0,6 \text{ m}, C_{0,05} = 0,42 \text{ m}, C_{0,1} = 0 \text{ m}, C_{0,15} = -0,42 \text{ m}, C_{0,2} = -0,6 \text{ m}.$$

---

Stojaté vlnenie sa líši od postupného vlnenia nasledujúcimi vlastnosťami

1. častice prostredia pri stojatom vlnení kmitajú s rôznymi amplitúdami, pri postupnom vlnení častice prostredia kmitajú s rovnakou amplitúdou  $A$  (obr. 4.19),
2. častice prostredia pri stojatom vlnení kmitajú medzi dvoma uzlami s rovnakou fázou (v rovnakom čase dosahujú svoje maximálne výchylky) (obr. 4.19), pri postupnom vlnení častice dosahujú svoju amplitúdu  $A$  v rôznych časoch (kmitajú s rôznou fázou),
3. pri postupnom vlnení dochádza k prenosu vlnenia prostredníctvom väzby medzi časticami, ktorá zabezpečuje aj prenos energie medzi nimi. Presvedčíme sa o tom napríklad pri viditeľnom svetle so Slnka, ktorého dopad lúčov na našu tvár je spojená s teplom, ktoré pociťujeme. Pri stojatom vlnení to neplatí. Keď sa skladajú dve rovnaké vlny postupujúce oproti sebe, prenášajú rovnakú energiu opačnými smermi. Potom výsledná energia bude nulová. Preto výsledkom skladania je kmitanie častíc, ktoré si energiu neodovzdávajú.



Obr. 4.19

---

**Príklad 8:** Stojaté vlnenie vzniklo skladaním dvoch proti sebe postupujúcich vlnení s frekvenciou 2 kHz. Vzďialenosť susedných uzlov bola 10 cm. Aká je rýchlosť vlnenia?

$$f = 2 \text{ kHz} = 2000 \text{ Hz}$$

$$d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$v = ?$$

Na výpočet rýchlosti stojatého vlnenia použijeme vzťah  $v = \lambda f$ . Zo vzťahu (22) pre vlnovú dĺžku  $\lambda = 2d$ . Potom

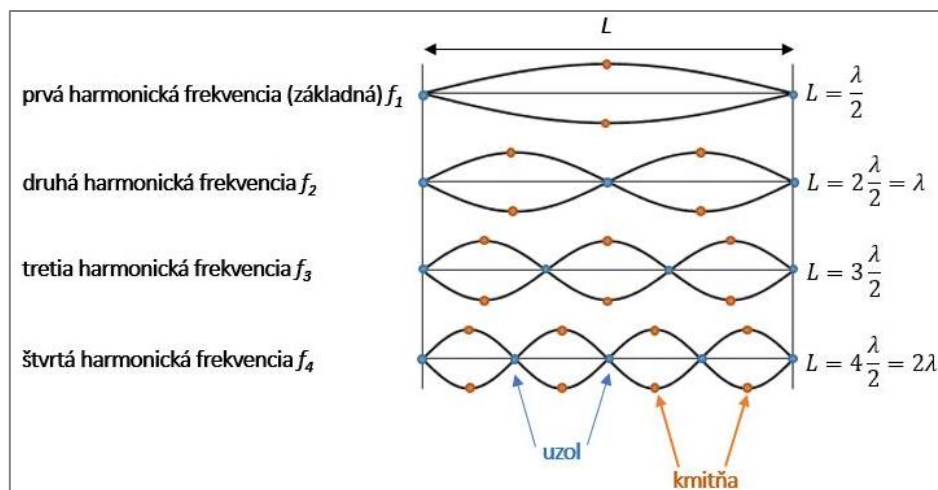
$$v = \lambda f = 2df. \text{ Dosadením } v = 2 \cdot 0,1 \cdot 2000 = 400 \text{ m/s}.$$

**Rýchlosť vlnenia, z ktorého vzniklo stojaté vlnenie je 400 m/s.**

---

Stojaté vlnenie vzniká napríklad pri hre na strunových hudobných nástrojoch. Pri rozochvení struny, upevnenej na oboch koncoch, sa ňou začne šíriť vlnenie opačnými

smerni oproti sebe. Dochádza k vzniku stojatého vlnenia. Počet uzlov a kmitní závisí od frekvencie vydávaného zvuku. Základný tón vznikne pri stojatej vlne s jednou kmitňou uprostred, pri tzv. prvej harmonickkej frekvencii. Druhý, ak stojaté vlnenie má dve kmitne (obr. 4.20). Struna môže kmitať s rôznymi frekvenciami, ktoré sú celočíselným násobkom najnižšej frekvencie, ktorou je prvá harmonická (základná) frekvencia. Pohyb rozkmitanej struny je teda zložený z harmonických kmitov s niekoľkými frekvenciami. Podobne to funguje aj pri stojatom vlnení, ktoré vznikne na pružine.



Obr. 4.20



Pozrite videá na stojaté vlnenie zo zdroja:

<http://web.tuke.sk/feikf/video/stojate-vlnenie.html>

<http://web.tuke.sk/feikf/video/stojate-vlnenie---pruzina.html>

Ak by sa skladali dve proti sebe postupujúce vlnenia s rôznymi amplitúdami, potom by vzniklo okrem stojatého vlnenia aj postupné vlnenie, ktoré by sa šírilo v smere vlny s väčšou amplitúdou. Takýto prípad nastáva napríklad v rádiolokátoroch pri čiastočnom odraze elektromagnetickej vlny na konci vlnovodu, ktorým sa vlna privádza k vysielacej anténe.

### Kontrolka 11:

Vyberte správnu odpoveď: Pri stojatom vlnení

- d) všetky body prostredia kmitajú s rovnakou amplitúdou,
- e) vlnenie sa šíri prostredím,
- f) dochádza k prenosu energie,
- g) existujú body, ktoré nekmitajú.

[Odpoveď](#)

## Otázky na zopakovanie:

1. Vysvetlite kedy dochádza ku vzniku stojatého vlnenia?
2. Aký princíp sa pri skladaní vln využíva, a čo hovorí?
3. Ako je daná výchylka stojatého vlnenia, od čoho závisí? Aká je amplitúda a vlnová dĺžka stojatého vlnenia vzhľadom na pôvodne skladajúce sa vlnenia?
4. Ako kmitajú častice prostredia pri stojatom vlnení?
5. Vysvetlite, prečo výsledné vlnenie popísané v tejto časti nazývame stojaté vlnenie?
6. Ako je daná amplitúda stojatého vlnenia? Od čoho závisí?
7. Definujte uzly a kmitne. Aké podmienky pre nich platia?
8. Odvod'te vzdialenosť medzi dvomi uzlami.
9. Vysvetlite, aký je rozdiel medzi postupným a stojatým vlnením z hľadiska ich amplitúd, fáz a prenosu energie.
10. Vysvetlite, prečo ak ťukneme do ladičky kladivkom a budeme ladičku približovať k stene (kolmo na ňu), bude ladička v niektorých vzdialenostiach od steny viac rezonovať a v iných zvuk bude stlmený?
11. Doplňte tvrdenia:
  - a) Stojaté vlnenia vznikne skladaním dvoch vlnení, ktoré sa šíria ..... seba s rovnakou ....., ..... a .....
  - b) Vzťah  $u(x, t) = C \sin \omega t$  je ..... výsledného stojatého vlnenia.
  - c) Zo vzťahu pre výchylku stojatého vlnenia vyplýva, že častice prostredia ..... okolo osi  $x$ .
  - d) Pri stojatom vlnení sa vlna ..... prostredím.
  - e) Amplitúda stojatého vlnenia je daná .....
  - f) Kmitne sú miesta, v ktorých častice prostredia kmitajú s ..... amplitúdou.
  - g) Uzly sú miesta, v ktorých častice prostredia kmitajú s ..... amplitúdou.
  - h) Vzdialenosť dvoch uzlov je rovná ..... vlnovej dĺžky.
  - i) Pri stojatom vlnení častice kmitajú s ..... amplitúdou a ..... fázou medzi dvomi uzlami.

## Odpovede

- j) Pri postupnom vlnení častice kmitajú s ..... amplitúdou a ..... fázou.
- k) Pri stojatom vlnení ..... k prenosu energie.
12. Vyberte správne tvrdenie. Pri stojatom vlnení je výsledná výchylka určená
- ako súčet výchyliek skladaných vln,
  - ako rozdiel výchyliek skladaných vln,
  - výchylkou vlnenia idúceho v smere osi  $x$ .
13. Vyberte správne tvrdenie. Amplitúda častíc pri stojatom vlnení závisí
- od času  $t$ ,
  - od vzdialenosti  $x$ ,
  - od času  $t$  a vzdialenosti  $x$ .
14. Vyberte správne tvrdenia. Kmitne sú body, ktoré kmitajú
- s nulovou amplitúdou,
  - v  $(2n+1)$  - násobkoch štvrtiny vlnovej dĺžky, pre  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,
  - vo vzdialenosti rovnej  $n$  - násobku polovice vlnovej dĺžky, pre  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,
  - s maximálnu amplitúdou.
15. Vyberte správne tvrdenia. Uzly sú body, ktoré kmitajú
- s nulovou amplitúdou,
  - v  $(2n+1)$  - násobkoch štvrtiny vlnovej dĺžky,
  - vo vzdialenosti rovnej  $n$  - násobku polovice vlnovej dĺžky,
  - s maximálnu amplitúdou.
16. Vypočítajte vzdialenosť druhej kmitne a prvého uzla z príkladu 7. Použite postup z tohto príkladu. Dokážte, že je možné použiť pri výpočte aj vzťah (22).
17. Stojaté vlnenie vzniklo interferenciou dvoch vln s frekvenciou  $f = 300$  Hz postupujúcich v danom prostredí rýchlosťou  $v = 500$  m/s. Aká je vzdialenosť susedných uzlov stojatého vlnenia?

[Odpovede](#)





# Odpovede na kontrolky a otázky

## Časť 4.1

**Kontrolka 1:** Vyberte správnu odpoveď.

- a) mechanické vlnenie sa šíri vo vákuu,
- b) zdrojom vlnenia je kmitajúci predmet,
- c) pri postupnom priečnom vlnení častice kmitajú rovnobežne so smerom šírenia vlnenia.

Správna odpoveď je b), odpoveď a) neplatí a odpoveď c) sa týka postupného pozdĺžneho vlnenia. [Späť na text](#)

**Kontrolka 2:** Vyberte správnu odpoveď. Výchylka vlnenia je funkciou

- a) len času,
- b) len vzdialenosti,
- c) vzdialenosti a času.

Správna odpoveď je c). [Späť na text](#)

**Kontrolka 3:**

Vyberte správnu odpoveď. Vlnoplocha

- a) vyjadruje smer vlnenia,
- b) tvoria ju body, do ktorých sa vlnenie dostalo za daný časový interval,
- c) sa nachádza v najväčšej vzdialenosti od zdroja v danom okamihu.

Správna odpoveď je b), odpoveď a) sa týka lúča vlnenia a odpoveď c) je definíciou čela vlnenia. [Späť na text](#)

**Odpovede na otázky:**

1. Mechanické vlnenie vzniká prenosom kmitavého pohybu zdroja na častice prostredia. Tie kmitajú s rovnakou frekvenciou a amplitúdou ako zdroj. Častice prostredia kmitajú okolo svojich rovnovážnych polôh a zabezpečujú prenos kmitania zdroja cez vzájomné väzby.

2. Zdrojom vlnenia je ľubovoľné teleso, ktoré kmitá. Vlnenie sa šíri len v látkovom prostredí.
3. Vo vákuu neexistujú častice, ktoré by prostredníctvom vzájomnej väzby (vzájomného silového pôsobenia) prenášali kmitavý pohyb zdroja. [Späť na otázky](#)
4. Kmitanie je pohyb telesa po priamke okolo rovnovážnej polohy, výchylka kmitania závisí len od času. Vlnenie je prenos kmitavého pohybu zdroja prostredím, jeho výchylka závisí od času a vzdialenosti častice od zdroja.
5. Lúč zobrazuje smer vlnenia.
6. Vlnoplocha je súhrn bodov do ktorých sa vlnenie dostalo za daný časový interval.
7. Každý bod, do ktorého vlnenie došlo, možno považovať za nový (sekundárny) zdroj vlnenia.
8. Čelo vlny tvorí vlnoplocha, ktorá sa nachádza v najväčšej vzdialenosti od zdroja v danom okamihu. Je to vonkajší obal všetkých elementárnych vlnoplôch.
9. Dopadajúci kameň je zdrojom vlnenia, ktoré sa začne po jeho dopade šíriť v mláke v tvare kruhov podľa Huyghensovho princípu. Vlnoplochy v tvare kruhov sú potvrdením, že sa vlnenie v mláke šíri.
10. Súvisí to s princípom šírenia mechanického vlnenia. Častice prostredia (vody) pri prenose vlnenia len kmitajú okolo svojich rovnovážnych polôh a teda spolu s nimi kmitajú aj predmety na hladine.
11. Doplňte tvrdenia:
  - a) Pri postupom vlnení sa rozruch prenáša na **d'alšie body prostredia**.
  - b) Pri postupnom priečnom vlnení častice kmitajú **kolmo** na smer šírenia vlnenia.
  - c) Častice kmitajú rovnobežne so smerom šírenia vlnenia pri **pozdĺžnom** vlnení.
  - d) Výchylka častice pri kmitaní je funkciou **času  $t$** .
  - e) Výchylka častice pri vlnení je funkciou **času  $t$  a vzdialenosti  $x$** .
  - f) Body vlnoplochy kmitajú s **rovnakou** fázou. [Späť na otázky](#)

## Časť 4.2

### Kontrolka 4:

Vyberte správnu odpoveď. Rýchlosť šírenia vlnenia izotropným prostredím

- a) má smer kmitania zdroja,
- b) sa mení s časom,
- c) je konštantná.

Správna odpoveď je c). Odpovede a) a b) platia pre kmitanie častíc prostredia.

[Späť na text](#)

### Kontrolka 5:

Vyberte správne odpovede. Priečne vlnenie

- a) sa šíri vo všetkých prostrediach,
- b) vyvoláva zmenu objemu,
- c) sa šíri v pevných látkach,
- d) vyvoláva zmenu tvaru.

Správne odpovede sú c) a d). Odpovede a) a b) platia pre pozdĺžne vlnenie. [Späť na text](#)

### Odpovede na otázky:

1. Je to prostredie s rovnakými vlastnosťami v celom svojom objeme.
2. Vlnenie sa šíri prostredím s rovnakou frekvenciou a amplitúdou ako zdroj. Tvar vlny závisí od kmitavého pohybu zdroja, ak zdroj kmitá harmonicky, tak aj vlna má priebeh harmonickej funkcie.
3. Najkratšiu vzdialenosť medzi dvoma minimami predstavuje vlnová dĺžka.
4. Fázová rýchlosť je rýchlosť, ktorou sa šíri rovnaká fáza kmitavého pohybu. Je daná rovnicou  $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ . [Späť na otázky](#)
5. Rýchlosť šírenia vlnenia závisí od vlastnosti prostredia, ktoré sa v izotropnom prostredí nemenia, preto sa nemení ani rýchlosť vlnenia, je konštantná.
6. Železničné koľajnice sú z ocele, v ktorej je rýchlosť šírenia pozdĺžnych zvukových vln (cca 5000 m/s, vid'. [príklad 1](#)) väčšia ako rýchlosť zvuku vo vzduchu (343 m/s). Preto je možné, omnoho skôr počuť zvuk prichádzajúceho vlaku, ak priložíme ucho ku koľajnici ako vo vzdialenosti 10 m od koľajníc, kde sa zvuk šíri vzduchom.

7. Doplňte tvrdenia:

- a) Rýchlosť šírenia vlnenia izotropným prostredím je **konštantná**.
- b) Rýchlosť kmitania častíc prostredia sa **mení** s časom.
- c) Vlnová dĺžka je dráha, ktorú prejde fáza vlny počas jednej **periódy**.
- d) Smer rýchlosti vlnenia je **rovnaký** ako smer šírenia vlnenia.
- e) Smer rýchlosti kmitania častíc je **rovnaký** ako smer **kmitania zdroja**.
- f) V pevných látkach sa šíri **pozdĺžne** a **priečne** vlnenie.
- g) Kvapaliny sa bránia zmene **objemu** a nebránia sa zmene **tvaru**.
- h) Pevné látky sa bránia zmene **objemu** a **tvaru**.

8. Správna odpoveď je a), čo vyplýva zo vzťahu (1), podľa ktorého je rýchlosť vlnenia nepriamo úmerná perióde.

9. Správna odpoveď je c). Vlnová dĺžka je definovaná ako dráha, ktorú prejde fáza vlny za jednu periódu a fázová rýchlosť je konštantná. Potom za jednu štvrtinu periódy prejde štvrtinu vlnovej dĺžky.

10. Správna odpoveď je a), vyplýva to zo vzťahu (3).

[Späť na otázky](#)

11. Vlnová dĺžka zvuku je 1,482 m.

12.  $\lambda_1 = 2,4$  m,  $\lambda_2 = 0,6$  m,  $\lambda_3 = 0,1$  m

13. Rýchlosť tsunami na pobreží je približne 28 km/h.

14. Rýchlosť vln je 342 m/s.

15. Rýchlosť vln na hladine jazera, ktorými sa šíria okolo rybárového člna je 2,4 m/s.

16. Modul pružnosti v ťahu striebra je  $E = 79$  GPa. Rýchlosť priečných vln v striebre je 1653 m/s.

17. Rýchlosť pozdĺžnych vln vo vode pri 50°C je 1568 m/s.

[Späť na otázky](#)

## Časť 4.3

### Kontrolka 6:

Výchylka zdroja vlnenia je daná rovnicou  $x = 5 \cos (2\pi t)$ . Vyberte správnu odpoveď. Rovnica rovinatej vlny, ktorá sa šíri v zápornom smere osi  $x$  s rýchlosťou  $v$  bude daná

a)  $u(x,t) = 5 \sin (2\pi t - 2\pi x/v)$ ,

b)  $u(x,t) = 5 \cos (2\pi t - 2\pi x/v)$ ,

c)  $u(x,t) = 5 \cos (2\pi t + 2\pi x/v)$ ,

d)  $u(x,t) = 5 \sin (2\pi t + 2\pi x/v)$ .

Správna odpoveď je c). Zdroj kmitá podľa funkcie kosínus, preto vo výchylke bude kosínus a vlnenie sa šíri v zápornom smere osi  $x$ , preto pred členom  $2\pi x/v$  bude znamienko plus. [Späť na text](#)

### Odpovede na otázky:

1. Výchylka zdroja sa zapisuje v tvare  $u(0, t) = A \sin \omega t$  alebo  $u(0, t) = A \cos \omega t$ .

2. Zápis výchyliek je  $u(x, t) = A \sin \left[ \omega \left( t \pm \frac{x}{v} \right) \right]$ , kde pred členom  $\frac{x}{v}$  je znamienko mínus pre vlnu postupujúcu v kladnom smere osi  $x$  a znamienko plus pre vlnu šíriacu sa v zápornom smere osi  $x$ .

3. Uhlové vlnové číslo je dané  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , jeho jednotkou je  $m^{-1}$ .

4. Výchylka je daná  $u(x, t) = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$ .

5. Výchylka je daná  $u(x, t) = A \sin \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) \right]$ . Postup odvodenia je v časti 4.3.

6. Správna odpoveď je a). Porovnaním výchylky  $(x, t) = 0,8 \sin \left[ 50\pi \left( t - \frac{0,3}{100} \right) \right]$  (m) s rovnicou výchylky vo všeobecnom tvare  $u(x, t) = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]$  dostaneme  $A = 0,8$  m. [Späť na otázky](#)

7. Správna odpoveď je b). Porovnaním výchylky  $(x, t) = 0,8 \sin \left[ 50\pi \left( t - \frac{0,3}{100} \right) \right]$  (m) s rovnicou výchylky vo všeobecnom tvare  $u(x, t) = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]$  dostaneme  $\omega = 50\pi$  s<sup>-1</sup>.

8. Správna odpoveď je c). Z porovnania výchylky  $(x, t) = 0,8 \sin \left[ 50\pi \left( t - \frac{0,3}{100} \right) \right]$  (m) s rovnicou výchylky vo všeobecnom tvare  $u(x, t) = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]$  vyplýva, že  $v = 100$  m/s,  $x = 0,3$  m. [Späť na otázky](#)

9. Doplňte tvrdenia:

- a) Pri postupnom vlnení častice prostredia kmitajú s rovnakou **amplitúdou**, ktorú dosahujú v inom **čase** a v danom okamihu v inej **vzdialenosti** od zdroja.
- b) V rovnici  $u(x, t) = 2 \sin(3t - 8x)$  je 8 **uhlové vlnové číslo**.
- c) Ak zdroj vlnenia kmitá podľa rovnice  $(x, t) = 0,5 \cos(50t)$ , potom výchylka častice vo vzdialenosti 30 cm, do ktorej došlo vlnenie rýchlosťou 10 m/s v kladnom smere osi  $x$ , bude daná  **$u(x, t) = 0,5 \cos \left[ 50 \left( t - \frac{0,3}{10} \right) \right]$  (m)**.
- d) Zdroj vlnenia kmitá podľa funkcie kosínus. Ak vlnová dĺžka vlnenia je 50 cm, amplitúda vlnenia 2 cm a uhlová frekvencia  $20 \text{ s}^{-1}$  a vlnenie sa šíri v zápornom smere osi  $y$ , potom výchylka častice je  **$u(y, t) = 0,02 \cos \left( 20t + \frac{2\pi}{0,5}y \right)$  (m)**
- e) Vlnová dĺžka súvisí s uhlovým vlnovým číslom podľa vzťahu  **$\lambda = \frac{2\pi}{k}$** .
- f) Výchylka častice pri postupnom vlnení je funkciou **času a vzdialenosti častice od zdroja**.

10. Lanom sa začne šíriť postupné priečne vlnenie zo zdroja, ktorým je kmitavý pohyb jedného konca lana (pohyb hore dole). Častice prostredia (lano), budú kmitať s rovnakou amplitúdou ako zdroj, budú ju dosahovať postupne v rôznych časoch, čo sa prejaví tak, že lano sa začne vlniť.

11.  $A = 0,5 \text{ m}$ ,  $T = 0,1 \text{ s}$ ,  $f = 10 \text{ Hz}$ ,  $\lambda = 0,2 \text{ m}$ ,  $v = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

[Späť na otázky](#)

12.  $u(x, t) = -4,75 \text{ cm}$

13.  $v_{\max} = 1,25 \text{ m/s}$ ,  $\frac{v_{\max}}{v} = 0,25$

14.  $\frac{A}{\lambda} = 1,59$

15.  $\lambda = 0,24 \text{ m}$

## Časť 4.4

### Kontrolka 7:

Vyberte správnu odpoveď: Pri skladaní dvoch vlnení z koherentných zdrojov vznikne

- a) postupné vlnenie s inou frekvenciou ako mali skladané vlnenia,
- b) postupné vlnenie s rovnakou amplitúdou ako mali skladané vlnenia,
- c) postupné vlnenie s rovnakou frekvenciou ako mali skladané vlnenia.

Správna odpoveď je c).

[Späť na text](#)

### Kontrolka 8:

Vyberte správne odpovede: Ak dráhový rozdiel  $x_1 - x_2 = 2\lambda$ , potom

- a) výsledné vlnenie bude mať maximálnu amplitúdu,
- b) výsledné vlnenie bude mať minimálnu amplitúdu,
- c) výsledná amplitúda bude daná  $A = |A_1 - A_2|$ ,
- d) výsledná amplitúda bude daná  $A = A_1 + A_2$ .

Správne odpovede sú a) a d).

[Späť na text](#)

### Kontrolka 9:

Vyberte správne odpovede: Pri skladaní dvoch vlnení z koherentných zdrojov s amplitúdami  $A_1 = 3A_2$ , v prípade, keď sú vlnenia vo fáze

- a) dôjde k úplnej konštruktívnej interferencii,
- b) výsledná amplitúda bude daná  $A = A_1 - 3A_2$ ,
- c) dôjde k čiastočnej interferencii,
- d) výsledná amplitúda bude daná  $A = 4A_2$ .

Správne odpovede sú c) a d).

[Späť na text](#)

### Odpovede na otázky:

1. Pod pojmom interferencia rozumieme skladanie vlnení. Je to fyzikálny jav, ktorý nastane, ak dve alebo viacero vlnení prechádza tým istým miestom v rovnakom časovom okamihu.



2. Princíp superpozície sa týka skladania vlnení a hovorí, že ak dve vlnenia prechádzajú tým istým miestom v tom istom časovom okamihu, potom výsledná výchylka sa rovná súčtu jednotlivých výchýliek, vzniká vlnenie s jednou vlnou a sčítavané vlnenia sa navzájom neovplyvňujú.
3. Výsledná výchylka sa učí ako súčet výchýliek jednotlivých skladajúcich sa vlnení.
4. Koherentné zdroje majú rovnakú frekvenciu a rovnaké fázy, amplitúdu môžu mať rovnakú. [Späť na otázky](#)
5. a) Výsledná výchylka je daná vzťahom  $u(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$ , závisí od časového okamihu  $t$  a dráhového rozdielu  $x$ .
- b) Amplitúda výsledného vlnenia je daná  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos kx}$ , z tohto vzťahu vyplýva, že je konštantná v čase, závisí však od amplitúd skladaných vlnení  $A_1, A_2$  a od dráhového rozdielu  $x$ .
- c) Aby výsledná amplitúda bola minimálna, musí byť kosínus  $\cos kx = -1$ , v prípade maxima amplitúdy sa musí  $\cos kx$  rovnať 1.
- d) Čiastočná interferencia pri ktorej je amplitúda maximálna nastane, ak dráhový rozdiel  $x_1 - x_2$  bude rovný celočíselnému násobku vlnovej dĺžky.
- e) Úplne konštruktívna interferencia nastane, ak amplitúdy skladaných vlnení sú rovnaké a vlnenia sú vo fáze. Úplne deštruktívna interferencia nastane, ak amplitúdy skladaných vlnení sú rovnaké a vlnenia majú opačnú fázu.
6. Pri vysielaní rozhlasu sa šíri zvuk rovnakej frekvencie z viacerých reproduktorov naraz, ktoré sú umiestnené v rôznych vzdialenostiach od poslucháča. Dochádza ku skladaniu vlnení. Výsledná amplitúda skladaných vlnení závisí od dráhového rozdielu skladaných vlnení (vzdialenosti od ucha poslucháča). Preto na námestí dôjde v niektorých miestach k zosilneniu zvuku (miesta, v ktorých častice kmitajú s maximálnou amplitúdou) a niekde dochádza k zoslabeniu zvuku (miesta s minimálnou amplitúdou).
7. a) Ak sú vlnenia vo fáze a dochádza ku čiastočnej interferencii, je  $\cos kx = 1$ . Potom dosadením do vzťahu (15)  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot 1} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$ .
- b) V prípade, že vlnenia majú opačnú fázu pri čiastočnej interferencii je  $\cos kx = -1$ . Potom dosadením do vzťahu (15)  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot (-1)} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = |A_1 - A_2|$ .
8. Z [príkladu 6](#) vyplýva, pre fázový posun vlnení  $\Delta\varphi = k(x_1 - x_2) = kx$ , kde za dráhový rozdiel dosadíme  $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$ . Úpravou  $\Delta\varphi = k(2n + 1) \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\pi}{\lambda} = (2n + 1) \pi$ , pre  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Z matematiky vyplýva, že dve harmonické funkcie majú opačnú fázu, ak rozdiel ich fáz je rovný  $\pi, 3\pi, 5\pi \dots$ . Výsledok zodpovedá tomuto poznatku. [Späť na otázky](#)

9. Doplňte tvrdenia:

- a) Skladanie vlnení nastáva, ak dve vlnenia prechádzajú **rovnakým** miestom v **rovnakom** čase.
- b) Pri skladaní dvoch vlnení vzniká **jedno** vlnenie.
- c) Výsledné vlnenie, ktoré vznikne skladaním dvoch postupných vlnení v rovnakom smere bude **postupné** vlnenie.
- d) Výchylka výsledného vlnenia závisí od **času** a od **dráhového rozdielu**.
- e) Dráhový rozdiel je daný vzťahom  $x = x_1 - x_2$ .
- f) Amplitúda výsledného vlnenia je daná vzťahom  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos kx}$ .
- g) Výsledná amplitúda bude maximálna, keď  $\cos kx = 1$ .
- h) Výsledná amplitúda bude minimálna, keď  $\cos kx = -1$ .

10. Správna odpoveď je a).

11. Správna odpoveď je a).

12. Správna odpoveď je b).

13. Správna odpoveď je c).

14. Správna odpoveď je a).

15. Správne odpovede sú b) a d).

16. Správna odpoveď je d).

[Späť na otázky](#)

17. a)  $A = |A_1 - A_2| = 2 \text{ cm}$ ,

b)  $A = A_1 + A_2 = 8 \text{ cm}$ ,

c)  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos kx} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 50^\circ} = 7,3 \text{ cm}$

## Časť 4.5

### Kontrolka 10:

Vyberte správnu odpoveď: Vyberte správnu odpoveď: Skladaním dvoch vlnení postupujúcich oproti sebe s amplitúdou  $A = 0,05$  m a frekvenciou  $f = 50$  Hz vzniklo stojaté vlnenie. Výchylka výsledného vlnenia bude popísaná rovnicou

a)  $u(x, t) = 0,1 \cos kx \sin 100\pi t$ ,

b)  $u(x, t) = 0,05 \cos kx \sin 50\pi t$ ,

c)  $u(x, t) = 0,1 \cos kx \sin 50\pi t$ .

[Späť na text](#)

Správna odpoveď je a). Porovnaním výchylky stojatého vlnenia  $u(x, t) = 2A \cos kx \sin \omega t = C \sin \omega t$ , potom  $C = 2A = 0,01$  m,  $\omega = 2\pi f = 100\pi$ .

### Kontrolka 11:

Vyberte správnu odpoveď: Pri stojatom vlnení

- a) všetky body prostredia kmitajú s rovnakou amplitúdou,
- b) vlnenie sa šíri prostredím,
- c) dochádza k prenosu energie,
- d) existujú body, ktoré nekmitajú.

Správna odpoveď je d). Ostatné odpovede sa týkajú postupného vlnenia. [Späť na text](#)

### Odpovede na otázky:

1. Stojaté vlnenie vznikne skladaním dvoch vlnení postupujúcich oproti sebe s rovnakou frekvenciou, v zjednodušenom prípade aj s rovnakou amplitúdou a rýchlosťou.
2. Pri stojatom vlnení sa využíva princíp superpozície, ktorý hovorí, že ak dve vlnenia prechádzajú tým istým miestom v tom istom časovom okamihu, potom výsledná výchylka bude rovná súčtu jednotlivých výchyliek, vznikne vlnenie s jednou vlnou a sčítavajúce sa vlnenia sa navzájom neovplyvňujú.
3. Výchylka stojatého vlnenia je daná  $u(x, t) = C \sin \omega t$ , kde  $C$  je amplitúda vlnenia, ktorá sa líši od amplitúdy  $A$  pôvodného vlnenia. Výchylka stojatého vlnenia v danej vzdialenosti od zdroja závisí len od času. Zo vzťahu (3) v [príklade 7](#) vyplýva, že vlnová dĺžka stojatého vlnenia je taká istá ako bola vlnová dĺžka pôvodného skladajúceho sa vlnenia.

4. Častice prostredia pri stojatom vlnení kmitajú okolo osi  $x$ , pričom každá častica kmitá s inou amplitúdou.
5. Zo vzťahu pre výchylku stojatého vlnenia vyplýva, že výsledné vlnenie nie je postupné vlnenie. V argumente funkcie sínus nie je výraz  $(\omega t - kx)$ , ktorý je typický pre postupné vlnenie. Vyjadrenie výchylky stojatého vlnenia sa podobá na výchylku kmitavého pohybu. Vlna sa nešíri prostredím, ale stojí na mieste.
6. Amplitúda stojatého vlnenia je daná  $C = 2A \cos kx$ . Z tohto vzťahu vyplýva, že závisí len od vzdialenosti častice prostredia od zdroja. [Späť na otázky](#)
7. Kmitne sú miesta, kde častice prostredia kmitajú s maximálnou amplitúdou, t.j.  $C = 2A$ , kde  $\cos kx = 1$ , vo vzdialenosti rovnej  $n$ -násobku polovice vlnovej dĺžky. Uzly sú miesta vo vzdialenosti  $(2n+1)$ -násobkoch štvrtiny vlnovej dĺžky, kde častice prostredia majú nulovú amplitúdu, t.j.  $C = 0$ , kde  $\cos kx = 0$ .
8. Odvodenie vzdialenosti pre dva uzly je podobné ako pre dve kmitne, vyjadríme ju ako rozdiel vzdialenosti  $(n+1)$ -tého a  $n$ -tého uzla podľa vzťahu [\(21\)](#)

$$d = [2(n+1) + 1] \frac{\lambda}{4} - (2n+1) \frac{\lambda}{4} = (2n+2+1) \frac{\lambda}{4} - 2n \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \frac{2\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

9. Pri postupnom vlnení dosahujú častice prostredia, ktoré ho prenášajú rovnaké amplitúdy, ale dosahujú ich v rôznych časoch, teda majú rôzne fázy. Naopak pri stojatom vlnení kmitajú častice s rôznymi amplitúdami, pričom medzi dvoma uzlami kmitajú súčasne s rovnakou fázou. Energiu prenáša len postupné vlnenie.
10. Ak sa s rozkmitanou ladičkou pohybujeme ku stene, dochádza k vzniku stojatého vlnenia (skladá sa vlnenie z ladičky s odrazeným vlnením od steny), čo je možné aj počuť. Miesta, kde ladička viac rezonuje, sú kmitne, naopak v miestach, kde dôjde k utlmeniu zvuku sa nachádzajú uzly.
11. a) Stojaté vlnenia vznikne skladaním dvoch vlnení, ktoré sa šíria **oproti** sebe s rovnakou **frekvenciou, amplitúdou a rýchlosťou** .
  - b) Vzťah  $u(x, t) = C \sin \omega t$  je **výchylka** výsledného stojatého vlnenia.
  - c) Zo vzťahu pre výchylku stojatého vlnenia vyplýva, že častice prostredia **kmitajú** okolo osi  $x$ .
  - d) Pri stojatom vlnení sa vlna **nešíri** prostredím. [Späť na otázky](#)
  - e) Amplitúda stojatého vlnenia je daná  **$C = 2A \cos kx$**  .
  - f) Kmitne sú miesta, v ktorých častice prostredia kmitajú s **maximálnou** amplitúdou.
  - g) Uzly sú miesta, v ktorých častice prostredia kmitajú s **nulovou** amplitúdou.

- h) Vzdialenosť dvoch uzlov je rovná **polovici** vlnovej dĺžky.
- i) Pri stojatom vlnení častice kmitajú s **rôznou** amplitúdou a **rovnakou** fázou medzi dvomi uzlami.
- j) Pri postupnom vlnení častice kmitajú s **rovnakou** amplitúdou a **rôznou** fázou.
- k) Pri stojatom vlnení **nedochádza** k prenosu energie.
12. Správna odpoveď je a).
13. Správna odpoveď je b).
14. Správne odpovede sú c) a d).
15. Správne odpovede sú a) a b).
16. Druhá kmitňa je vo vzdialenosti  $x = 0,2$  m a prvý uzol vo vzdialenosti  $x = 0,1$  m od zdroja. Ak si uvedomíme, že vzdialenosť dvoch kmitní je  $d = \frac{\lambda}{2} = \frac{0,4}{2} = 0,2$  m, potom k vzdialenosti prvej kmitne stačí pripočítať túto hodnotu  $x = x_0 + d = 0 + 0,2$  m. Prvý uzol sa nachádza medzi prvou a druhou kmitňou, teda vo vzdialenosti  $x = \frac{d}{2} = 0,1$  m.
17.  $d = 0,833$  m

[Späť na otázky](#)

## **Použitá literatúra:**

Červeň, I. 2007. Fyzika po kapitolách. Kmitanie a vlnenie. 1.vydanie. Bratislava. Vydavateľstvo STU v Bratislave. 2007. ISBN 978-80-227-2668-9.

Haliday D., Resnick R., Walker J. 2000. Fyzika, Vysokoškolská učebnice obecné fyziky. 1. vyd. Brno. Vutium, 2000. ISBN 80-214-1868-0.

Hlaváčová, J., Ziman J., Kovaľáková, M., Zagyí, B. Fyzika I. Elfa, Košice. 2005. ISBN 80-8086-009-2.

Landau, L. D., Kitajgorodskij, A. I. 1975. Fyzika pro každého. Praha. Horizont. 1975.

Zámečník, L. 1984. Prehľad stredoškolskej fyziky. Bratislava. Alfa. 1984.

<http://obrazky.4ever.sk/>

[http://www.gymza.sk/gymza/predmety/fyzika/web\\_fyzika/Stojate\\_vlnenie/standingwaves.html](http://www.gymza.sk/gymza/predmety/fyzika/web_fyzika/Stojate_vlnenie/standingwaves.html)

<https://phet.colorado.edu/en/simulations/category/physics>

<http://web.tuke.sk/feikf/video/index.html>

<http://www.fch.vut.cz/lectures/video/>

<http://vojtahanak.cz/files/edu/kmity/bonus-sireni.html>

<http://hockicko.uniza.sk/Priklady/Pr265.htm>

<http://fyzika.jreichl.com/>

[https://sk.wikipedia.org/wiki/R%C3%BDchlos%C5%A5\\_zvuku](https://sk.wikipedia.org/wiki/R%C3%BDchlos%C5%A5_zvuku)

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/sound>

[http://www.fsiforum.cz/upload/soubory/nezarazene/Hydromechanika\\_--FSI\\_VUT\\_Brno--.pdf](http://www.fsiforum.cz/upload/soubory/nezarazene/Hydromechanika_--FSI_VUT_Brno--.pdf)

<https://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/mechanicke-vlastnosti-pevnych-latek>

[http://www.dobraskola.sk/materialy/dls/1037/priecne\\_pozdlz\\_vln.pdf](http://www.dobraskola.sk/materialy/dls/1037/priecne_pozdlz_vln.pdf)

<https://www.e-fyzika.cz/kapitoly/16-vlneni.pdf>

[http://web.tuke.sk/feikf/sk/files/5\\_kmity\\_vlny.pdf](http://web.tuke.sk/feikf/sk/files/5_kmity_vlny.pdf)



RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

**FYZIKA – Mechanické vlnenie**

Vydavateľ: **Technická univerzita v Košiciach**

Náklad: 50 kusov

Počet strán: 64

Vydanie: prvé

2018

**ISBN 978-80-553-3401-1**