

# Rezolučné odvodzovanie vo výrokovej logike

(Aplikácia logiky v inteligentných systémoch)

M. Mach

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI, TUKE

september 2020

# Dedukcia ako dôkaz sporom

- Potrebne overiť platnosť zahrnutia  $KB \models \alpha$  pre nejakú hypotézu  $\alpha$
- Platia vzťahy
  - dedukčný teorém:  $KB \models \alpha \leftrightarrow \text{validný}(KB \rightarrow \alpha)$
  - $\text{validný}(KB \rightarrow \alpha) \leftrightarrow \text{validný}(\neg KB \vee \alpha)$
  - $\text{validný}(\neg KB \vee \alpha) \leftrightarrow \text{nesplniteľný}(\neg(\neg KB \vee \alpha))$
  - $\text{nesplniteľný}(\neg(\neg KB \vee \alpha)) \leftrightarrow \text{nesplniteľný}(KB \wedge \neg\alpha)$
- Dokázať  $KB \models \alpha$  sa dá nepriamo dôkazom nesplniteľnosti  $KB \wedge \neg\alpha$
- Dokázať nesplniteľnosť znamená nájsť spor

# Rezolvenčné odvodzovacie pravidlo a spor

- J. A Robinson, 1965
- Na rozdiel od ekvivalentných transformácií používa iba jednu transformáciu – rezolúciu
- Detekcia sporu rezolvenčným odvodzovacím pravidlom

$$\frac{P \quad \neg P}{\quad} \quad \circledast$$

- Výsledná rezolventa je prázdna klauzula
- Prázdna klauzula je považovaná za nesplniteľnú

# Hľadanie sporu rezolúciou

- Opakované aplikovanie rezolvenčného pravidla nad množinou klauzúl ( $\neg P \vee Q$ ,  $\neg Q \vee R$ ,  $P$  a  $\neg R$ )

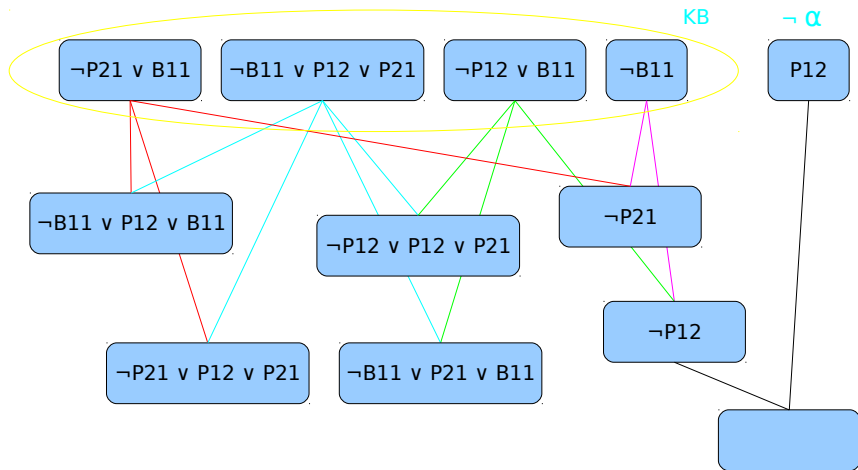
$$\frac{\frac{\frac{\neg P \vee Q \quad \neg Q \vee R}{\neg P \vee R}}{R} \quad P}{\neg R} \quad \emptyset$$

- Bol nájdený spor, teda pôvodná množina klauzúl je protirečivá (nesplniteľná)
- Ak už nie je možné vytvoriť žiadnu ďalšiu rezolventu a spor ešte nebol nájdený, tak nie je možné vyvrátiť platnosť skúmanej množiny klauzúl

# Hrubá podoba algoritmu

- $KB$  sa rozšíri o negáciu hypotézy:  $KB \wedge \neg\alpha$
- Rozšírená  $KB$  sa transformuje do CNF, ak ešte nie je v tom tvare
- Kombinujú sa klauzuly obsahujúce komplementárne literály a produkujú sa nové klauzuly (rezolventy) až pokiaľ:
  - Vznikne prázdna rezolventa (detekcia sporu) –  $KB$  zahŕňa hypotézu
  - Nie je možné pokračovať v kombinovaní s produkciou nových ešte neobjavených rezolvent –  $KB$  nezahŕňa hypotézu

# Príklad použitia



# Formálny tvar algoritmu

**vstup:** množina klauzúl  $KB$  v klauzulárnom tvare

**výstup:**  $TRUE$  v prípade dokázania sporu alebo  $FALSE$  inak

- 
1.  $KB := KB \setminus \{ C : C \text{ obsahuje čistý literál} \}$
  2. **while**  $\neg(\emptyset \in KB)$  **do**
  3.     vyber  $C_1, C_2 \in KB$
  4.     **if** žiadny nový pár  $C_1, C_2$  neexistuje **then return**  $FALSE$
  5.      $Rez := \{ R : R \text{ je rezolventa } C_1 \text{ a } C_2, \text{ nie je tautológia} \}$
  6.     **for**  $R \in Rez$  **do**
  7.          $R := \text{redukcia viacnásobného výskytu v } R$
  8.         **if** žiadna klauzula z  $KB$  nezahŕňa  $R$
  9.         **then**  $KB := \{ R \} \cup KB \setminus \{ C : R \text{ zahŕňa } C \}$
  10. **return**  $TRUE$

# Prečo vylúčiť čistý literál ?

- Ak k nejakému literálu v skúmanej množine klauzúl neexistuje komplementárny literál, hovoríme o *čistom* literále
- Neexistencia komplementárneho literálu znamená nemožnosť vylúčenia čistého literálu z klauzuly
- Na čistý literál nie je možné použiť rezolvenčné odvodzovacie pravidlo
  - a teda klauzula s čistým literálom nemôže byť redukovaná na prázdnu rezolventu
- Z hľadiska cieľa (dosiahnutie sporu) sú klauzuly s čistým literálom zbytočné



# Prečo vylúčiť tautológie ?

- Tautológia je validná a môže byť z vety v tvare CNF odstránená bez zmeny pravdivostnej hodnoty vety

$$\top \wedge A \equiv A$$

- Ak by nebola odstránená, môže nastať

$$\frac{\frac{\frac{\neg P \vee Q \vee R \quad \neg Q \vee P}{\neg P \vee R \vee P} \quad \neg R}{\neg P \vee P} \quad \neg P}{\neg P}$$

- Tautológia nevedie na získanie spornej rezolventy

# Prečo vylúčiť viacnásobný výskyt ?

- Rezolventa môže obsahovať viacnásobný výskyt toho istého literálu
- Viacnásobný výskyt možno zredukovať  $P \vee P \equiv P$
- Ak by nebola redukcia, môže nastať

$$\frac{\frac{P \vee Q \quad \neg Q \vee P}{P \vee P}}{\neg P} \quad P$$

- Detekcia sporu sa nekoná

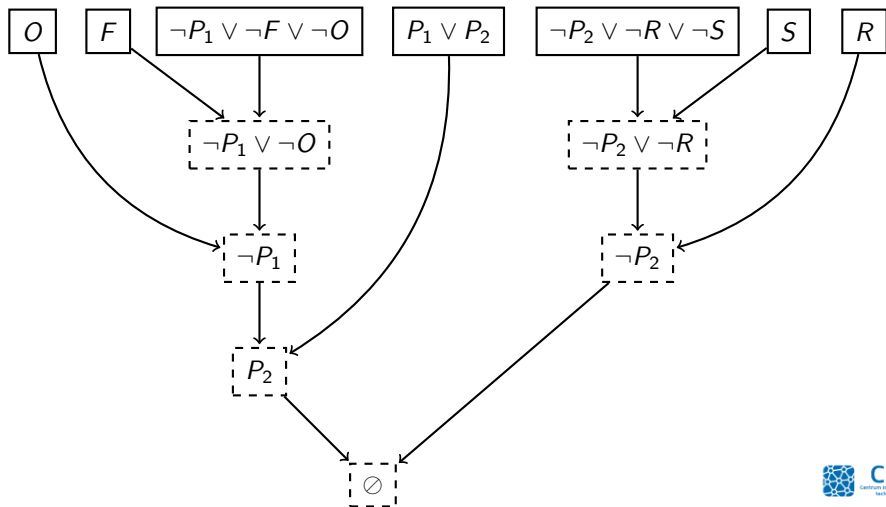
# Prečo vylúčiť zahrnuté klauzuly ?

- Jedna klauzula (kratšia) môže zahŕňať inú (dlhšiu), ak dlhšia obsahuje všetky literály kratšej
  - splniteľnosť zahŕňajúcej znamená aj splniteľnosť zahrnutej klauzuly
- Ak by zahrnuté klauzuly neboli vylúčené, môže nastať

$$\frac{\neg P \vee Q \vee R}{\frac{\frac{\neg Q}{\neg P \vee R} \quad \neg R}{\neg P} \quad P} \quad \frac{Q \vee R \quad \neg Q}{R} \quad \frac{\neg R}{\emptyset}$$

- Ak zahrnutú klauzulu je možné redukovať na spor, tak to je možné aj pre zahŕňajúcu klauzulu (a trvá to kratšie), opačne to nemusí platiť

# Derivačný graf a redundancia



# Generovanie zbytočných rezolveníí

3. *vyber*  $C_1, C_2 \in KB$
4. **if** žiadny nový pár  $C_1, C_2$  neexistuje **then return FALSE**
5.  $Rez := \{R : R \text{ je rezolventa } C_1 \text{ a } C_2, \text{ nie je tautológia} \}$

- Výber dvojíc klauzúl pre rezolveníiu ovplyvňuje počet generovaných rezolvent (pre úspešné dokazovanie)
  - postupovanie dlhšou cestou
  - súčasné postupovanie viacerými spôsobmi dosiahnutia sporu
  - postupovanie do slepej uličky (smerom ako sa spor nedá dosiahnuť)
- Vhodné voliť tak, aby sa minimalizoval počet generovaných rezolvent

# Stratégie voľby klauzúl

- Najznámejšie stratégie
  - Usporiadanie podľa veľkosti
  - Jednotková preferencia (neúplná stratégia)
  - Oporná množina
  - Hĺbková saturácia
  - Vstupná rezolvenca (úplná iba pre tvar Hornových klauzúl)
  - Lineárna rezolvenca
- Všetky sú správne
  - neodvodia spor ak CNF je splniteľná
  - ak odvodia spor tak CNF je naozaj nesplniteľná
- Nie všetky sú úplné
  - niektoré nenájdu spor aj keď CNF je nesplniteľná