FYZIKA

DUŠAN OLČÁK - ZUZANA GIBOVÁ - OĽGA FRIČOVÁ

Apríl 2006

Obsah

Kapitola 1

o-g-f:Mechanický pohyb tuhého telesa

Všetky hmotné objekty počnúc takými veľkými ako sú napr., hviezdy a planéty až po mikroskopické častice, akými sú aj atómy a molekuly, sa nachádzajú v neustálom pohybe. Relatívne najjednoduchším z rozmanitých druhov pohybov vyskytujúcich sa v prírode je *mechanický pohyb*, ktorý sa prejavuje vzájomnými zmenami polôh telies, resp. častíc. K takému pohybu patrí napr. pohyb človeka chodiaceho po zemi, pohyb Zeme vzhľadom k Slnku, pohyb mechanizmov zložených z rôznych súčastí a pod.

Mechanický pohyb môžu vykonávať objekty všetkých skupenstiev. V tuhej látke sú atómy a molekuly v porovnaní s atómami a molekulami v kvapalných a plynných látkach medzi sebou viazané podstatne väčšími silami, preto sa pri mechanickom pohybe tuhého telesa všetky jeho časti pohybujú rovnakým spôsobom. Mechanický pohyb telies je možné popísať jednoduchšie ako mechanický pohyb kvapalín a plynov. Kvapaliny a plyny kvôli ich niektorým podobným vlastnostiam označujeme spoločným názvom *tekutiny*. Časti tekutiny sa dajú od seba relatívne jednoducho oddeliť, preto pohyb tekutiny, ktorý často nazývame *prúdením*, je mnohotvárnejší.

Treba mať na zreteli, že atómy a molekuly sa v látkach pohybujú aj vtedy, keď teleso je v pokoji, resp. tekutina neprúdi. V týchto látkach sa chaoticky pohybuje obrovský počet častíc s rôzne veľkými rýchlosťami a v rôznych smeroch. Pohyb uvažovaného súboru častíc nepatrí medzi mechanické pohyby a nazýva sa *tepelný pohyb*.

Telesá sa vplyvom vzájomného pôsobenia s inými telesami môžu deformovať a môžu meniť svoj pohybový stav. Pre skúmanie mechanického pohybu tuhých telies je výhodné zaviesť pojem *dokonale tuhého telesa*. Je to teleso, ktoré za žiadnych okolností nemení svoj tvar. To znamená, že vplyvom pôsobenia iných telies sa nemenia vzdialenosti medzi akýmikoľvek dvoma časticami uvažovaného telesa. Je zrejmé, že pojem dokonale tuhého telesa je abstrakcia. Existuje však mnoho prípadov, keď vplyvom pôsobiacej sily sa tvar telesa nemení, alebo sa mení tak nepatrne, že zmena môže byť zanedbateľná a pôsobiaca sila spôsobuje len zmenu pohybového stavu. V takých prípadoch je výhodné pohyb študovať pomocou zákonov platných pre pohyb dokonale tuhých telies.

Pri opise pohybu telesa je potrebné špecifikovať pohyb každého bodu telesa. Často sa stretávame s *posuvným* (*translačným*) a *otáčavým* (*rotačným*) pohybom. Pri translačnom pohybe sa všetky body telesa pohybujú rovnakým spôsobom, preto pri jeho popise stačí špecifikovať pohyb jedného, ľubovoľne zvoleného bodu telesa. Teleso sa nachádza v rotačnom pohybe, ak trajektórie všetkých jeho bodov sú kružnice, ktorých stredy ležia na spoločnej priamke, ktorá sa nazýva *osou rotácie*.

Pri mechanickom pohybe vzťahujeme polohu telesa k nejakému inému telesu, ktoré možno považovať za nepohyblivé. Napr. pohyb vlaku vzťahujeme k zemskému povrchu, pričom Zem v tomto prípade považujeme za nepohyblivú. Kvôli pohybu Zeme okolo Slnka je pohyb vlaku vzhľadom na Slnko iný, je zložitejší ako vzhľadom na zemský povrch. Vidíme, že pohyb závisí od telesa, vzhľadom ku ktorému jeho pohyb vzťahujeme. Na základe uvedeného príkladu a aj ďalších príkladov, ktoré poznáme zo skúseností môžeme konštatovať, že pohyb telies vzhľadom na rôzne vzťažné telesá je rôzny. Hovoríme, že pohyb má *relatívnu povahu*.

Pre skúmanie pohybu telies je účelné zaviesť pojem *hmotného bodu*, resp. *častice*. Budeme ním rozumieť teleso, ktorého rozmery možno pri študovanom pohybe zanedbať vzhľadom na ostatné rozmery. Prirodzene, taký prístup je len abstrakciou, pretože v prírode žiadne hmotné body nejestvujú. Avšak v mechanike je mnoho problémov takého charakteru, pri ktorých táto abstrakcia je veľmi užitočná. Napr., pri skúmaní pohybu Zeme okolo Slnka môžeme Zem považovať za hmotný bod. Na druhej strane, ak chceme vysvetliť príčinu striedania dní a nocí, musíme skúmať otáčavý pohyb Zeme okolo jej osi, pri ktorom rozmer Zeme nemôžeme zanedbať. Teda v niektorých problémoch teleso môže byť považované za hmotný bod bez rozmerov, kým v iných úlohách taká abstrakcia nemôže byť urobená. Je zrejmé, že ak sa teleso nachádza v translačnom pohybe, namiesto pohybu telesa vždy môžeme skúmať pohyb hmotného bodu.

Pri štúdiu mechanického pohybu je potrebné charakterizovať pohyb telesa a vysvetliť dôvody, prečo sa teleso pohybuje práve takým spôsobom ako sa pohybuje. Prvým problémom, opisom pohybu, sa zaoberá časť mechaniky, ktorá sa nazýva *kinematika* a vysvetľovaním príčin pohybu sa zaoberá *dynamika*.

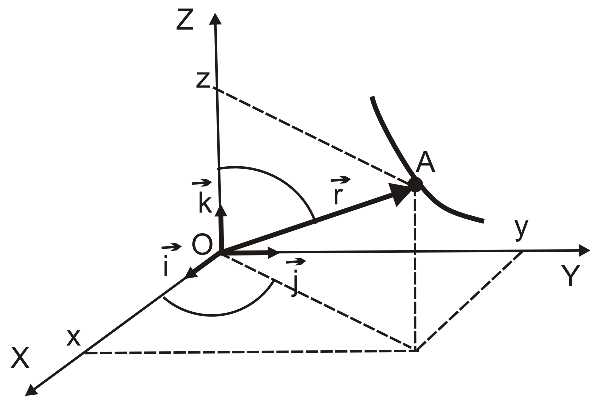
1.1 Kinematika hmotného bodu

Polohu hmotného bodu a aj jeho pohyb budeme vzťahovať vzhľadom k nejakému zvolenému bodu O, ktorý budeme nazývať *vzťažným bodom*. Poloha ľubovoľného bodu A vzhľadom na bod O je určená polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, ktorého začiatok je v bode O a koncový bod v mieste A (obr. 1.1). Polohu je možné určiť aj pomocou pravouhlých súradníc x, y, z pravouhlej súradnicovej sústavy, ktorej začiatok je vo vzťažnom bode O alebo pomocou sférických súradníc r, ϑ, φ . Z obr. 1.1 je zrejmé, že platia vzťahy

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{1.1}$$

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad (1.2a)$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad (1.2b)$$
$$z = r \cos\vartheta, \quad (1.2c)$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v smere osí X, Y a Z. Z uvedených rovníc (1.1) a (1.2) vyplýva, že určenie polohy bodu pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}$, alebo pomocou pravouhlých súradníc x, y, z, prípadne sférických súradníc r, ϑ, φ je celkom rovnocenné. Pri riešení konkrétneho mechanického problému vyberáme taký spôsob určovania polohy, ktorý poskytuje najjednoduchšie riešenie.



Obrázok 1.1 Určenie polohy hmotného bodu pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}$, pravouhlých súradníc x, y, z a sférických súradníc r, ϑ, φ.

Hmotný bod sa vzhľadom na vzťažný bod pohybuje, ak vzhľadom na tento bod mení svoju polohu. Čiara, ktorú hmotný bod opisuje pri svojom pohybe je *trajektória* pohybu vzhľadom k vzťažnému bodu. Trajektória pohybu, podobne ako aj dráha, rýchlosť, zrýchlenie a ďalšie parametre pohybu, závisí od voľby vzťažného bodu. Napr. teleso pustené vo vlaku, ktorý sa vzhľadom k Zemi pohybuje konštantnou rýchlosťou, sa vzhľadom k vlaku pohybuje po zvislej priamke, avšak trajektóriou pohybu vzhľadom k Zemi je krivka - parabola. Teda trajektória pohybu je vzhľadom k rôznym vzťažným bodom rôzna. O trajektórii môžeme hovoriť len v relatívnom zmysle, t. j. má zmysel o nej hovoriť len vtedy, keď ju vzťahujeme k nejakému vzťažnému bodu. Dĺžka vymedzeného úseku na trajektórii je *dráhou pohybu* hmotného bodu.

Rovnicu, ktorá určuje polohu hmotného bodu v ľubovoľnom okamihu t nazývame *rovnicou trajektórie* pohybu. Časovú závislosť polohy hmotného bodu môžeme vyjadriť pomocou vektorovej rovnice

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad (1.3)$$

alebo pomocou troch skalárnych rovníc

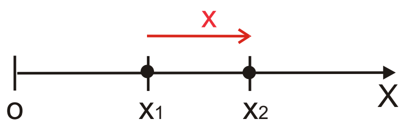
$$x = x(t), \quad (1.4a)$$
$$y = y(t), \quad (1.4b)$$
$$z = z(t), \quad (1.4c)$$

ktoré sú s vektorovou rovnicou (1.3) rovnocenné. Je zrejmé, že rovnicu trajektórie je možné určiť aj pomocou časovej závislosti sférických súradníc r, ϑ a φ.

1.1.1 Rýchlosť a zrýchlenie pohybu

Rýchlosť pohybu

Z hľadiska hodnotenia pohybu je potrebné poznať, ako rýchlo hmotný bod mení svoju polohu vzhľadom k vzťažnému bodu O a ako rýchlo hmotný bod prejde určitú dráhu. Uvažujme najprv o jednoduchšom prípade, keď hmotný bod sa pohybuje po priamke. Zvoľme si pravouhlý súradnicový systém tak, aby os X bola totožná s uvažovanou trajektóriou pohybu a vzťažný bod O stotožníme s počiatkom súradnícového systému (obr. 1.2).



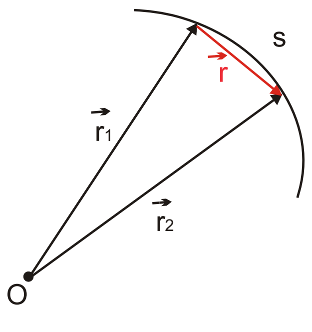
Obrázok 1.2 Posunutie hmotného bodu $\Delta x = x_2 - x_1$ pri jeho pohybe po priamke v kladnom smere osi X. Posunutie je vektor, ktorého smer je určený algebraickým znamienkom Δx.

Predpokladajme, že hmotný bod sa pohybuje v kladnom smere osi X. V okamihu t_1 nech sa hmotný bod nachádza v mieste určenom súradnicou x_1 a neskôr, v čase t_2, nech jeho súradnica je x_2. Rozdiel $\Delta x = x_2 - x_1$ budeme nazývať *posunutím* hmotného bodu, ktoré sa uskutočnilo za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$. V uvažovanom prípade posunutie je kladné, avšak ak by sa hmotný bod pohyboval z miesta x_1 v opačnom smere, posunutie Δx by bolo záporné. Teda v prípade pohybu hmotného bodu po priamke znamienko posunutia určuje smer pohybu.

V priebehu doby (časového intervalu) Δt sa pohyb hmotného bodu môže rôznym spôsobom meniť. Pomocou podielu

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.5}$$

definujeme *priemernú* (*strednú*) rýchlosť pohybu, pričom pomocou indexu x sme označili skutočnosť, že pohyb hmotného bodu sa uskutočňuje pozdĺž osi X. Smer priemernej rýchlosti $\bar{v}_x$ je určený smerom posunutia Δx.



Obrázok 1.3 Posunutie hmotného bodu $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ pri krivočiarom pohybe. Δs je dráha, ktorú hmotný bod prešiel pri jeho posunutí o $\Delta \boldsymbol{r}$.

Vo všeobecnosti hmotný bod sa môže pohybovať po ľubovoľnej krivke nachádzajúcej sa v rovine alebo v priestore. V okamihu t_1 nech je poloha hmotného bodu určená polohovým vektorom $\boldsymbol{r_1}$ a v okamihu t_2 vektorom $\boldsymbol{r_2}$ (obr. 1.3). Posunutie hmotného bodu za dobu Δt je rozdiel $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ a vektor priemernej rýchlosti $\boldsymbol{v_p}$ hmotného bodu definujeme podielom

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \,. \tag{1.6}$$

Dráha Δs prejdená pri krivočiarom pohybe sa na rozdiel od priamočiareho pohybu nerovná veľkosti posunutia $|\Delta \boldsymbol{r}|$, t. j.

$\Delta s \neq |\Delta \boldsymbol{r}|$. Preto priemerná rýchlosť, ktorú definujeme vzťahom

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.7}$$

sa v prípade krivočiareho pohybu nerovná veľkosti vektora rýchlosti $\bar{\boldsymbol{v}}$, ktorý sme definovali vzťahom (1.6). Treba si však uvedomiť, že pomocou rov. 1.6 charakterizujeme rýchlosť zmeny polohy a pomocou rov. 1.7 charakterizujeme rýchlosť zmeny dráhy.

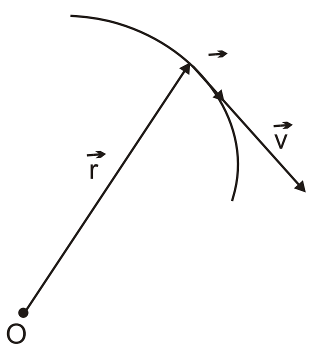
Smer a aj veľkosť priemernej rýchlosti $\bar{\boldsymbol{v}}$ sa môžu značne líšiť od smeru a veľkosti rýchlosti v nejakom okamihu t, ktorý sa nachádza medzi časmi t_1 a t_2. Podiel $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ v dvoch dostatočne blízkych časových okamihoch t_1 a t_2 približne určuje smer pohybu a aj veľkosť rýchlosti v zvolenom okamihu t, a to tým presnejšie, čím je interval Δt menší. Preto rýchlosť $\boldsymbol{v}$ v okamihu t, ktorá sa nazýva *okamžitá rýchlosť*, sa vypočíta ako limita

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{1.8}$$

ktorou je definovaná prvá derivácia polohového vektora $\boldsymbol{r}$ podľa času t, preto

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.9}$$

Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, ktorý má význam nekonečne malého posunutia, budeme ho nazývať *elementárnym* posunutím, spadá do smeru dotyčnice ku trajektórii pohybu a jeho veľkosť $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ je rovná elementárnej dráhe $\mathrm{d}s$.



Obrázok 1.4 Smer rýchlosti $\boldsymbol{v}$ v ľubovoľnom bode trajektórie je určený dotyčnicou k trajektórii a smerom pohybu hmotného bodu.

Vektor okamžitej rýchlosti môžeme vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}, \tag{1.10}$$

kde

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

je veľkosť okamžitej rýchlosti a $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor určený dotyčnicou v danom bode trajektórie a smerom pohybu (obr. 1.4).

Keď polohový vektor $\boldsymbol{r}$ vyjadríme pomocou jeho zložiek, dostaneme rozklad vektora rýchlosti na zložky

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{1.12}$$

pričom pre zložky rýchlostí v_x, v_y a v_z platia vzťahy

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{1.13}$$

Absolútna hodnota vektora rýchlosti sa vypočíta podľa vzťahu

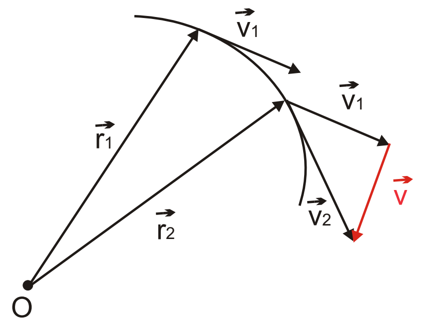
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \,. \tag{1.14}$$

Jednotkou rýchlosti je $1ms^{-1}$.

Zrýchlenie pohybu

Počas pohybu hmotného bodu môže rýchlosť meniť buď svoju veľkosť, buď svoj smer, alebo veľkosť a aj smer. Časová zmena rýchlosti je charakterizovaná vektorom zrýchlenia.

Predpokladajme, že hmotný bod pohybujúci sa po zakrivenej trajektórii nadobudol v čase t_1 rýchlosť $\boldsymbol{v_1}$ a v čase t_2 jeho rýchlosť bola $\boldsymbol{v_2}$ (obr. 1.5).



Obrázok 1.5 Grafické určenie zmeny rýchlostí $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ hmotného bodu pri jeho posunutí o $\Delta \boldsymbol{r}$.

Teda za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ hmotný bod zmenil svoju rýchlosť o $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$. *Priemerné zrýchlenie* pohybu $\bar{\boldsymbol{a}}$ hmotného bodu je definované podielom

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \,. \tag{1.15}$$

Okamžité zrýchlenie, t. j. zrýchlenie v čase t, je definované ako vektor

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.16}$$

a keďže $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ zrýchlenie

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \,. \tag{1.17}$$

Podobne ako v prípade vektora rýchlosti aj zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ môžeme rozložiť na zložky:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \,, \tag{1.18}$$

pričom pre zložky a_x, a_y, a_z platí

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \,. \tag{1.19}$$

Absolútnu hodnotu vektora zrýchlenia môžeme vyjadriť podľa vzťahu

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \,. \tag{1.20}$$

Jednotkou zrýchlenia je $1ms^{-2}$.

Zo vzťahu (1.9) môžeme určiť polohu hmotného bodu v ľubovoľnom čase t. Jednoduchou úpravou a integráciou dostaneme

$$\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v} \mathrm{d}t + \boldsymbol{r_0} \,. \tag{1.21}$$

Podobným spôsobom môžeme vypočítať rýchlosť častice v ľubovoľnom čase t. Z definície zrýchlenia (1.17) vyplýva pre rýchlosť vzťah

$$\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a} \mathrm{d}t + \boldsymbol{v_0} \,. \tag{1.22}$$

Vektory $\boldsymbol{r_0}$ a $\boldsymbol{v_0}$ v rov. (1.21) a (1.22) majú význam počiatočného polohového vektora a počiatočnej rýchlosti, t. j. sú rovné veličinám $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$ v nejakom okamihu $t = t_0$, často $t_0 = 0$.

Použitím rovnice (1.11) pre výpočet závislosti dráhy od času dostaneme

$$s = \int v \mathrm{d}t + s_0, \tag{1.23}$$

kde s_0 má význam počiatočnej dráhy. Pri vhodnej voľbe počiatočných podmienok môže byť $s_0 = 0$.

Priamočiary pohyb hmotného bodu

V prípade priamočiareho pohybu vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{a}$ ležia v tej istej priamke, preto smer jednotlivých vektorov môžeme vyjadriť pomocou znamienka a namiesto vektorovej rovnice (1.22) môžeme písať skalárnu rovnicu

$$v = \int a \mathrm{d}t + v_0 \,. \tag{1.24}$$

Priamočiary pohyb, pri ktorom $a = 0$ nazývame *rovnomerný priamočiary pohyb*. Z rovníc (1.23) a (1.24) je zrejmé, že dráha a rýchlosť pri tomto pohybe sa vypočítajú podľa vzťahov

$$s = vt \quad \text{a} \quad v = v_0 = \text{konšt.} \tag{1.25}$$

Priamočiary pohyb, pri ktorom $a = \text{konšt} \neq 0$ nazývame *rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb*. Z rovníc (1.23) a (1.24) vyplývajú pre dráhu a rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu vzťahy

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \quad \text{a} \quad v = at + v_0 \,. \tag{1.26}$$

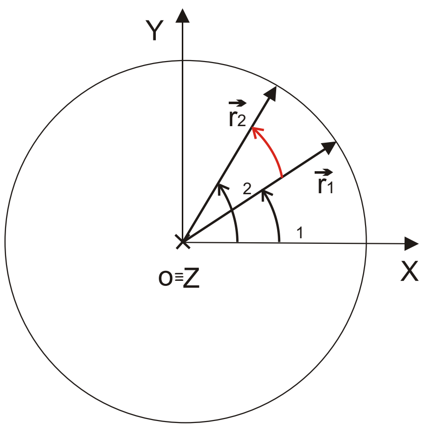
Z rozboru druhej z rovníc (1.26) vyplýva, že ak rýchlosť a zrýchlenie majú rovnaké znamienko, hmotný bod rovnomerne zvyšuje svoju rýchlosť (pohyb je zrýchlený) a v opačnom prípade pohyb hmotného bodu je spomalený.

Špeciálnym prípadom rovnomerne zrýchleného pohybu je voľný pád, pri ktorom telesá vyskytujúce sa v blízkosti zemského povrchu padajú s konštantným tiažovým zrýchlením $\boldsymbol{g}$. Pri skúmaní voľného pádu môžeme použiť rovnice (1.26), v ktorých $v_0 = 0$ a $a = g$.

1.1.2 Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie

Pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}$, rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ vieme kvantitatívne popísať ľubovoľný pohyb hmotného bodu. Pri translačnom pohybe telies všetky body telesa sa pohybujú po rovnakých trajektóriach a v danom okamihu majú rovnaké rýchlosti a rovnaké zrýchlenia. Iná situácia sa pozoruje pri otáčavom pohybe telies. V danom okamihu sa rôzne body telesa pohybujú po rôznych trajektóriach a v tom istom okamihu nenadobúdajú ani rovnaké rýchlosti ani rovnaké zrýchlenia. Úvahy týkajúce sa otáčavého pohybu sa značne zjednodušia zavedením fyzikálnych veličín *uhlové posunutie (otočenie), uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie*.

V prírode a v praktickom živote sa často stretávame s otáčavým pohybom. Zem sa otáča okolo svojej osi, elektróny vykonávajú otáčavý pohyb okola jadra atómu, súčastí rôznych mechanizmov, napr. koleso auta, vrtuľa lietadla a pod., vykonávajú otáčavý pohyb. Najjednoduchší otáčavý pohyb sa pozoruje v prípade, keď os rotácie nemení svoju orientáciu vzhľadom k telesu, ku ktorému pohyb vzťahujeme (ku vzťažnému telesu). Takú os budeme nazývať *pevnou osou rotácie*. Pri otáčavom pohybe telesa okolo pevnej osi všetky body sa pohybujú v rovinách, ktoré sú vzájomne paralelné. Taký pohyb je *rovinný*.



Obrázok 1.6 Uhlové posunutie (otočenie) hmotného bodu $\Delta\varphi$ pri pohybe po kružnici okolo osi o, ktorá je totožná s osou Z pravouhlej súradnicovej sústavy.

Pomocou veličín charakterizujúcich otáčavý pohyb telies (uhlové posunutie, uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie) je výhodné popísovať aj obežný pohyb telies, ktorých rozmery možno zanedbať. Napr. pri skúmaní pohybu družice okolo Zeme, pohybu Zeme okolo Slnka, pohybu elektrónu okolo jadra vodíka môžeme rozmery jednotlivých objektov zanedbať a tieto pohyby vyšetrovať ako otáčavý (obežný) pohyb hmotného bodu. Pri otáčavom pohybe sa najčastejšie stretávame s prípadmi, keď hmotný bod, alebo jednotlivé body telesa sa pohybujú po kružniciach. Treba mať však na zreteli, že vo všeobecnosti otáčavým pohybom rozumieme pohyb po trajektórii, ktorej polomer krivosti nie je konštantný, ale závisí od polohy hmotného bodu. Napr. pohyb hmotného bodu po elipse môžeme vyšetrovať ako otáčavý pohyb.

Nech sa hmotný bod pohybuje po kružnici polomeru r v rovine XY okolo osi Z pravouhlej súradnicovej sústavy (obr. 1.6) a ďalej predpokladajme, že pohyb je orientovaný proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Polohu hmotného bodu je možné určiť pomocou *(polohového) uhla* φ. Nech poloha hmotného bodu v čase t_1 je určená polohovým vektorom $\boldsymbol{r_1}$ a uhol, ktorý zviera tento vektor s osou X nech je φ_1. Predpokladajme, že v čase t_2 sa hmotný bod bude nachádzať v mieste určenom polohovým vektorom $\boldsymbol{r_2}$, ktorý s osou X zviera uhol φ_2. Pomocou rozdielu $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ definujeme *otočenie (uhlové posunutie)* hmotného bodu. Z obrázku je zrejmé, že podľa toho, či pohyb je vo smere alebo proti smeru hodinových ručičiek, otočenie hmotného bodu $\Delta\varphi$ nadobúda kladné alebo záporné hodnoty. V oblúkovej miere uhol a otočenie vyjadrujeme v *radiánoch (rad)*. Pohyb v priebehu doby $\Delta t = t_2 - t_1$ sa môže zložitým spôsobom meniť, môže sa napr. zrýchľovať, spomaľovať, alebo môže byť ustálený. Pre účely hodnotenia otáčavého pohybu je výhodné definovať *priemernú (strednú) uhlovú rýchlosť* $\bar{\omega}$ a *okamžitú uhlovú rýchlosť* ω. V analógii s postupom v časti 1.1.1 priemernú uhlovú rýchlosť $\bar{\omega}$ definujeme podielom

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{1.27}$$

a okamžitá uhlová rýchlosť ω je limitou priemernej uhlovej rýchlosti pre $\Delta t \to 0$, t. j.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,, \tag{1.28}$$

ktorá je rovná prvej derivácii uhla podľa času. Teda okamžitá uhlová rýchlosť (ďalej len uhlová rýchlosť)

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.29}$$

Zo vzťahov (1.27) a (1.29) vyplýva, že priemerná uhlová rýchlosť, resp. okamžitá uhlová rýchlosť majú rovnaké znamienko ako otočenie $\Delta\varphi$, resp. elementárne otočenie $\mathrm{d}\varphi$.

Nech v okamihu t_1 hmotný bod má uhlovú rýchlosť ω_1 a v čase t_2 nech nadobúda uhlovú rýchlosť ω_2, pričom zmena uhlovej rýchlosti $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. *Priemerné uhlové zrýchlenie* $\bar{\epsilon}$ definujeme pomocou podielu

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\,. \tag{1.30}$$

Podľa toho, či sa uhlová rýchlosť za dobu Δt zväčší alebo zmenší, priemerné uhlové zrýchlenie nadobúda kladné alebo záporné hodnoty. Už zo známych dôvodov definujeme *okamžité uhlové zrýchlenie* (ďalej len *uhlové zrýchlenie*) ϵ ako limitu

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\,, \tag{1.31}$$

ktorá je prvou deriváciou uhlovej rýchlosti podľa času:

$$\epsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.32}$$

Podľa rov. (1.29) uhlová rýchlosť ω je prvou deriváciou uhla podľa času, preto uhlové zrýchlenie môžeme vyjadriť aj pomocou druhej derivácie uhla podľa času, t. j.

$$\epsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{1.33}$$

Z vyššie uvedených definícií vyplýva, že jednotkou uhlovej rýchlosti je $rads^{-1}$ a jednotkou uhlového zrýchlenia je $rads^{-2}$.

Z rovníc (1.29) a (1.33) vyplývajú pre uhol a uhlovú rýchlosť vzťahy

$$\varphi = \int \omega \mathrm{d}t + \varphi_0 \quad \text{a} \quad \omega = \int \epsilon \mathrm{d}t + \omega_0, \tag{1.34}$$

v ktorých φ_0 je počiatočný uhol a ω_0 je počiatočná uhlová rýchlosť.

Rovnomerný a rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb po kružnici

Z otáčavých pohybov po kružnici najväčší význam má *rovnomerný otáčavý pohyb*, pri ktorom uhlové zrýchlenie $\epsilon = 0$. V takom prípade pre uhlovú rýchlosť ω a pre uhol φ je možné pomocou rovníc (1.34) odvodiť vzťahy

$$\omega = \text{konšt.} \quad \text{a} \quad \varphi = \omega t + \varphi_0. \tag{1.35}$$

Elementárna dĺžka kružnice $\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\varphi$, preto súvis medzi rýchlosťou (obežnou rýchlosťou) v a uhlovou rýchlosťou ω je

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\omega. \tag{1.36}$$

Doba, za ktorú sa pri rovnomernom otáčavom pohybe vykoná jedna otáčka je *perióda* otáčavého pohybu, pre ktorú zrejme platí

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.37}$$

Frekvencia otáčania

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.38}$$

vyjadruje počet otáčok za jednotku času (počet otáčok/s).

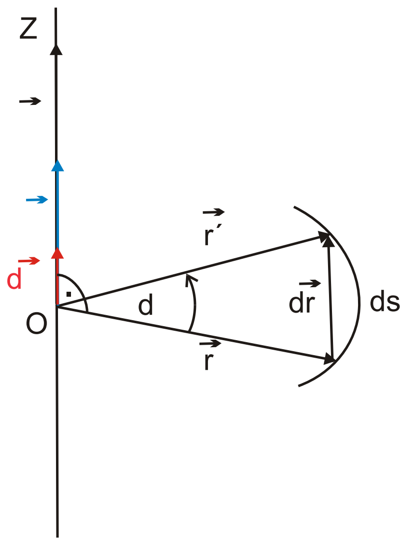
Pohyb po kružnici, pri ktorom uhlové zrýchlenie $\epsilon = \text{konšt.} \neq 0$, nazývame *rovnomerne zrýchleným otáčavým pohybom*. Po výpočte integrálov v rovniciach (1.34) dostaneme pre okamžitú hodnotu uhlovej rýchlosti ω a uhol φ, ktorý polohový vektor hmotného bodu opíše za čas t, vzťahy

$$\omega = \epsilon t + \omega_0 \quad \text{a} \quad \varphi = \frac{1}{2}\epsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0. \tag{1.39}$$

Spravidla počiatočné podmienky je možné zvoliť tak, aby počiatočný uhol $\varphi_0 = 0$.

Vektorový opis pohybu hmotného bodu po kružnici

V predchádzajúcej časti sme videli, že otočenie $\Delta\varphi$, uhlová rýchlosť ω a uhlové zrýchlenie ϵ nadobúdajú ako kladné tak aj záporné hodnoty. Znamienko otočenia a uhlovej rýchlosti závisí od orientácie otáčania sa hmotného bodu a znamienko uhlového zrýchlenia závisí aj od toho, či sa uhlová rýchlosť zväčšuje alebo spomaľuje. Z toho hľadiska situácia pri otáčavom pohybe okolo pevnej osi (rovinnom otáčavom pohybe) je úplne analogická tej, ktorú sme pozorovali pri pohybe hmotného bodu po priamke.



Obrázok 1.7 Znázornenie vektora uhlového posunutia (otočenia) d$\boldsymbol{\varphi}$, uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ a uhlového zrýchlenia $\boldsymbol{\epsilon}$ pri pohybe hmotného bodu po kružnici nachádzajúcej sa v rovine kolmej na os Z.

Na obr. 1.7 je znázornený rovnaký pohyb ako na predchádzajúcom obrázku 1.6, avšak rovina XY, v ktorej sa hmotný bod otáča po kružnici, je orientovaná kolmo na nákresňu. Poloha hmotného bodu v čase t nech je určená polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ a neskôr, po čase dt, nech sa hmotný bod nachádza v mieste, ktorého poloha je určená polohovým vektorom $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Elementárnemu otočeniu hmotného bodu (elementárnemu uhlu, ktorý zvierajú vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}'$) dφ priradíme vektor d$\boldsymbol{\varphi}$. *Jeho veľkosť sa rovná veľkosti uhla* dφ, *vektor* d$\boldsymbol{\varphi}$ *leží v priamke ktorá je kolmá na rovinu určenú vektormi* $\boldsymbol{r}$ *a* $\boldsymbol{r}'$ *(priamka je kolmá na rovinu XY) a je orientovaný na tú stranu roviny, z ktorej otáčanie pozorujeme proti smeru pohybu hodinových ručičiek*. V prípade znázornenom na obr. 1.7 vektor d$\boldsymbol{\varphi}$ je orientovaný v kladnom smere osi Z.

Vektor uhlovej rýchlosti je definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \tag{1.40}$$

a vektor uhlového zrýchlenia

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{1.41}$$

V nami uvažovanom prípade, keď sa hmotný bod stále otáča v tej istej rovine, všetky vektory ležia v tej istej priamke. Vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ má stále rovnaký smer ako je smer otočenia d$\boldsymbol{\varphi}$, avšak vzájomná orientácie týchto vektorov s vektorom uhlového zrýchlenia $\boldsymbol{\epsilon}$ nemusí byť rovnaká. Uvedené vektory sú rovnako orientované, ak otáčavý pohyb je zrýchlený a sú opačne orientované pri spomalenom otáčavom pohybe.

Definície uvedených vektorov majú všeobecnú platnosť, t. j. platia aj vtedy, keď os rotácie nie je pevná a otáčavý pohyb nie je rovinný, ale je priestorový. V takom prípade vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\epsilon}$ neležia v tej istej priamke, podobne ako vektor rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ pri krivočiarom pohybe.

Pri pohybe po kružnici vektory d$\boldsymbol{r}$, d$\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{r}$ sú navzájom kolmé a ich súvis vyjadruje rovnica[1]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}\,, \tag{1.42}$$

[1]Dôkaz platnosti vzťahu prenechávame na čitateľa.

z ktorej pre elementárnu dráhu vyplýva vzťah $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}\varphi r$. Delením rovnice (1.42) elementárnym časom $\mathrm{d}t$ dostaneme súvis medzi vektorom rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a vektorom uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$, t. j.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,. \tag{1.43}$$

Deriváciou poslednej rovnice podľa času dostaneme vzťah

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})\,, \tag{1.44}$$

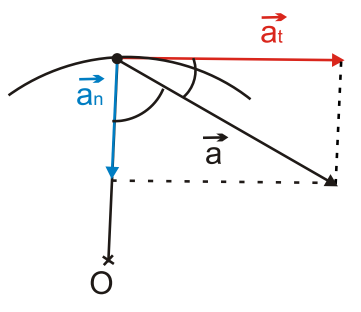
z ktorého vyplýva, že vektor zrýchlenia hmotného bodu $\boldsymbol{a}$ je možné pri otáčavom pohybe vyjadriť pomocou zložiek $(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r})$ a $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$. Z hľadiska hodnotenia krivočiarého pohybu majú obidve zložky veľký význam, preto sa im budeme podrobnejšie venovať v ďalšej samostatnej časti.

1.1.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie

Pomocou pravidla vektorového násobenia dvoch vektorov môžeme zistiť že vektor $(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r})$ leží v dotyčnici a vektor $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$ leží v normále v danom bode trajektórie a smeruje do stredu kružnice (obr. 1.8). Tieto zložky zrýchlenia označíme $\boldsymbol{a}_t$ a $\boldsymbol{a}_n$ a budeme ich nazývať *tangenciálnym* a *normálovým* zrýchlením, pre ktoré platí

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}\,. \tag{1.45}$$

Pri otáčavom pohybe okolo osi $o \equiv Z$ môžeme orientáciu vektorov $\boldsymbol{\epsilon}$ a $\boldsymbol{\omega}$ vyjadriť pomocou jednotkového vektora $\boldsymbol{k}$ a orientáciu vektorov $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$ pomocou jednotkových vektorov $\boldsymbol{\rho}$ a $\boldsymbol{\tau}$, pričom jednotkový vektor $\boldsymbol{\rho}$ leží v normále a smeruje zo stredu kružnice ku hmotnému bodu (obr. 1.8). Orientáciu osi Z si zvoľme tak, aby zo strany kladnej polosi sme pozorovali pohyb proti smeru pohybu hodinových ručičiek.



Obrázok 1.8 Rozklad zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ na tangenciálnu $\boldsymbol{a}_t$ a normálovú $\boldsymbol{a}_n$ zložku pri pohybe hmotného bodu po kružnici.

Vo vzťahoch pre tangenciálne a normálové zrýchlenia môžeme použitím uvedených jednotkových vektorov urobiť úpravy

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{r} = \epsilon r\,(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\rho})\,. \tag{1.46}$$

Keďže $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ a $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\tau}$, pre tangenciálne zrýchlenie môžeme ďalej písať

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} r\,\boldsymbol{\tau}\,. \tag{1.47}$$

Súčin uhlovej rýchlosti ω a veľkosti polohového vektora (polomeru kružnice) r určuje veľkosť rýchlosti hmotného bodu v, preto tangenciálne zrýchlenie

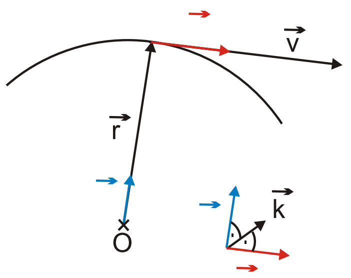
$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}\,. \tag{1.48}$$

Podobným spôsobom môžeme upraviť aj vzťah pre normálové zrýchlenie

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \omega v \left(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\tau} \right) = \omega^2 r (-\boldsymbol{\rho}) \,. \tag{1.49}$$

Využitím vzťahu $v = \omega r$ môžeme normálové zrýchlenie vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{v^2}{r} \boldsymbol{\rho}. \tag{1.50}$$



Obrázok 1.9 Znázornenie smeru vektorov $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\rho}$ a $\boldsymbol{\tau}$. Os otáčania $o \equiv Z$, ktorá prechádza bodom O, je kolmá na nákresňu a os Z a aj vektor $\boldsymbol{k}$ sú orientované na tú stranu, z ktorej otáčavý pohyb pozorujeme proti smeru hodinových ručičiek. V znázornenom prípade os Z smeruje za nákresňu.

Veľkosť tangenciálneho a normálového zrýchlenia je zrejme určená vzťahmi

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \,, \qquad a_n = \frac{v^2}{r} \,. \tag{1.51}$$

Celkové zrýchlenie pohybu je určené vektorovým súčtom

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\tau} - \frac{v^2}{r} \boldsymbol{\rho} \,. \tag{1.52}$$

Pre absolútnu hodnotu výsledného zrýchlenia platí (Obr.)

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} \tag{1.53}$$

a pre uhly, ktoré zviera vektor zrýchlenia s dotyčnicou, resp. s normálou v danom mieste trajektórie platia vzťahy

$$\tan \alpha = \frac{a_n}{a_t} \,, \qquad \tan \beta = \frac{a_t}{a_n} \,. \tag{1.54}$$

Zo vzťahov (1.53) a (1.54) vyplýva, že tangenciálnou a normálovou zložkou zrýchlenia je určená veľkosť a aj smer zrýchlenia pri krivočiarom pohybe.

V prípade krivočiareho pohybu sa vo všeobecnosti môže meniť veľkosť rýchlosti v a aj smer rýchlosti, ktorý určujeme pomocou jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$. Teda veľkosť rýchlosti v a aj jednotkový vektor $\boldsymbol{\tau}$ sú funkciami času t, preto pre vektor zrýchlenia $\boldsymbol{a}$ môžeme písať

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{1.55}$$

Keďže prvý vektor $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$ na pravej strane rov. (1.55) je tangenciálne zrýchlenie $\boldsymbol{a}_t$, druhý vektor $v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$ musí byť normálovým zrýchlením $\boldsymbol{a}_n$. Zo vzťahov pre tangenciálne a normálové zrýchlenie v rov. (1.55) je vidieť, že tangenciálne zrýchlenie charakterizuje časovú zmenu veľkosti rýchlosti a normálové zrýchlenie charakterizuje časovú zmenu smeru rýchlosti. Teda rozkladom zrýchlenia na tangenciálnu a normálovú zložku vieme zvlášť posúsiť ako sa mení veľkosť rýchlosti v závislosti od času a zvlášť posúdiťako sa mení smer rýchlosti v závislosti od času. Uvedené možnosti sú hlavným významom rozkladu vektora zrýchlenia na tangenciálnu a normálovú zložku.

Na záver bez dôkazu uvedieme, že vzťahy (1.48) a (1.50) neplatia len v prípade pohybu hmotného bodu po kružnici, ale majú všeobecnú platnosť. Podľa nich sa vypočíta tangenciálne a normálové zrýchlenie pri ľubovoľnom krivočiarom pohybe, pričom v takom prípade r je polomerom krivosti príslušného miesta na krivke (polomer oskulačnej kružnice) a vektor $\boldsymbol{\rho}$ smeruje do stredu krivosti S prislúchajúcemu uvažovanému bodu trajektórie pohybu.

1.2 Dynamika hmotného bodu

Zo skúsenosti vieme, že všetky telesá v prírode nejakým spôsobom navzájom na seba pôsobia. Hovoríme, že sú vo vzájomnej interakcii. Napr. atmosferický vzduch pôsobí tlakom na zemský povrch a na všetky objekty na Zemi, v dôsledku vzájomného pôsobenia medzi molekulami vody a molekulami telesa voda zmáča povrch telesa, existuje vzájomné pôsobenie medzi Zemou a Slnkom a pod.

Mechanika pojednáva o interakciách pri priamych kontaktoch telies a o gravitačných interakciách medzi telesami. Dôsledkom interakcie medzi telesami môže nastať zmena rýchlosti telesa alebo jeho deformácia, alebo súčasne zrýchlenie a deformácia. Pre charakterizovanie vzájomného pôsobenia je zavedený pojem sily ako miery vzájomného pôsobenia telies alebo častíc, z ktorých telesá pozostávajú. *Sila je fyzikálna veličina charakterizujúca vzájomné pôsobenie aspoň dvoch telies a určujúca zmenu pohybového stavu daného telesa alebo jeho deformáciu, alebo oboje.* Pripomeňme si, že v prípade dokonale tuhého telesa vonkajšia sila nemôže spôsobiť jeho deformáciu, ale môže spôsobiť jedine zmenu jeho pohybového stavu.

Hmotnosť a hybnosť telies

Vlastnosť telesa, ktorá súvisí s jeho schopnosťou zachovávať si svoj pohybový stav sa nazýva *zotrvačnosť*. Je to objektívna vlastnosť všetkých telies, ktorá sa prejavuje tým, že (1) pri rovnakom silovom pôsobení na rôzne telesá nedochádza k rovnakej zmene ich rýchlosti, alebo (2) k rovnakej rýchlosti rôznych telies je potrebné rôzne veľké silové pôsobenie. Zo skúsenosti vieme, že ak rovnako veľké telesá zhotovené z rôznych materiálov, napr. z hliníka a olova, chceme uviesť z pokoja do pohybu po hladkej podložke takým spôsobom, aby po rovnakom čase mali rovnaké rýchlosti, alebo naopak, ak majú rovnaké rýchlosti a chceme ich rovnakým spôsobom zastaviť, potrebujeme na nich pôsobiť rôzne veľkými silami. Z uvedených príkladov vyplýva, že uvažované telesá nemajú rovnaké zotrvačné vlastnosti. Kvantitatívnou mierou zotrvačnosti telies je fyzikálna veličina, ktorá sa nazýva *hmotnosť*. Ako uvidíme neskôr, pojem hmotnosti sa nevzťahuje len na látku (telesá, častice a pod.) ale aj na pole (napr. gravitačné, elektrické, magnetické). Hmotnosť je mierou zotrvačných vlastnosti hmoty v jej ľubovoľnej forme.

Jednotkou hmotnosti je $1kg$.

Všetky telesá navzájom na seba pôsobia gravitačnou silou, napr. Zem na Slnko, Zem na Mesiac, ale aj Zem na telesá nachádzajúce sa na zemskom povrchu. Zo skúseností vieme, že telesá nachádzajúce sa na zemskom povrchu nepôsobia rovnako veľkou silou na podložku, na ktorej sú položené. Je to preto, lebo telesá s rozdielnou hmotnosťou majú rozdielne gravitačné vlastnosti, t. j. majú rôznu schopnosť pôsobiť príťažlivou silou na iné telesá alebo majú rôznu schopnosť byť priťahovanými inými telesami. Hovoríme, že hmotnosť je taktiež mierou *gravitačných* vlastností telies.

Zo skúsenosti vieme, že telesá bez ohľadu na to, či sú v pokoji alebo sa pohybujú, napr. po zemskom povrchu, majú rovnakú hmotnosť. Toto konštatovanie však je platné len v klasickej (newtonovej) fyzike, t. j. v prípadoch, keď pohybujúce sa telesá majú omnoho menšiu rýchlosť ako je rýchlosť svetla vo vákuu, ktorá je $c \approx 3 \cdot 10^8 ms^{-1}$.

Teraz na chvíľu odbočíme od problémov klasickej fyziky a pripomeňme si, že elementárne častice dosahujú v kozme alebo v urýchľovačoch rýchlosti, ktoré sú porovnateľné s rýchlosťou svetla vo vákuu. V takých prípadoch zákony klasickej fyziky nie sú platné a pre príslušné výpočty je potrebné použiť závery Einsteinovej teórie relativity. Podľa tejto teórie hmotnosť častíc nie je konštantná, ale závisí od ich pohybového stavu a je určená vzťahom

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{1.56}$$

v ktorom m_0 je hmotnosť častice nachádzajúcej sa v pokoji, je to *pokojová hmotnosť* a m je hmotnosť častice pri rýchlosti v.

Pohybový stav telies charakterizujeme pomocou hybnosti $\boldsymbol{p}$, ktorá je definovaná súčinom hmotnosti telesa m a jeho rýchlosti $\boldsymbol{v}$, t. j.

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\,. \tag{1.57}$$

Jednotkou hybnosti je $1kgms^{-1}$.

1.2.1 Newtonove zákony mechaniky

Uviedli sme, že dynamika sa zaoberá súvislosťami medzi zmenou pohybového stavu telesa a príčinami, t. j. silami, ktoré uvedenú zmenu spôsobili. Na základe mnohých pokusov I. Newton sformuloval 3 zákony, ktoré tvoria základ teórie, dnes nazývanej newtonowskou (klasickou) mechanikou. Táto teória nemá všeobecnú platnosť, pretože pomocou nej nie je možné vysvetľovať prípady, keď rýchlosť interagujúcich objektov nie je zanedbateľná voči rýchlosti svetla a ani v prípadoch, keď interagujúcimi objektami sú mikročastice (napr. stavebné častice atómu). Treba však povedať, že klasická mechanika má nesmierny význam, pretože pomocou nej je možné skúmať pohyb objektov, ktoré sú relatívne malé, ale aj také, ktoré dosahujú astronomické rozmery.

Zákon zotrvačnosti

Prvý Newtonov zákon (*zákon zotrvačnosti*) hovorí, že *teleso zotrváva v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútené pôsobením iných telies svoj pohybový stav zmeniť.*

O tvare trajektórie ako aj o rýchlosti pohybu, o ktorých zákon pojednáva, nemôžeme hovoriť bez určenia referenčnej sústavy, vzhľadom ku ktorej pohyb chceme vzťahovať. Tie sústavy, v ktorých platí zákon zotrvačnosti sa nazývajú *inerciálne vzťažné sústavy*.

Predstava inerciálnej vzťažnej sústavy je len abstrakciou. Všetky referenčné sústavy sú vzťahované na určité telesá a všetky telesá nejakým spôsobom interagujú. Nie je možné nájsť teleso (voľné teleso), na ktoré nepôsobí žiadna sila a z tohto dôvodu nie je možné ani prísne vymedziť inerciálnu vzťažnú sústavu. Môžeme nájsť referenčné sústavy, ktoré pri riešení určitého okruhu problémov môžu byť považované za inerciálne. To, či daná referenčná sústava môže byť považovaná za referenčnú alebo nie, môžeme určiť len pomocou experimentu. Z experimentu napr. vyplýva, že vzťažná sústava spojená so Zemou v niektorých prípadoch môže byť považovaná za inerciálnu. To znamená, že existuje oblasť javov, na ktoré rotácie Zeme nemá vplyv. Rotácia Zeme neovplyvňuje činnosť strojov, pohyb dopravných prostriedkov, neovplyvňuje chemické reakcie, elektromagnetické procesy, biologické procesy a pod. Teda vzťažná sústava spojená so Zemou môže byť pri popisovaní uvedených procesov považovaná za inerciálnu. Na druhej strane každému je jasné, že napr. biologické procesy astronauta sediaceho v rakete pri jej štarte sa neuskutočňujú rovnakým spôsobom ako človeka sediaceho doma pri televízore. Vzťažná sústava spojená s raketou, ktorá sa voči Zemi pohybuje so zrýchlením je *neinerciálnou vzťažnou sústavou*.

Zo zákona zotrvačnosti vyplýva, že každá vzťažná sústava, ktorá je voči nejakej inerciálnej vzťažnej sústave v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe je taktiež inerciálna. Ak teleso v niektorej inerciálnej sústave je v pokoji, potom voči inej inerciálnej sústave je buď v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. Stav pokoja telies sa neodlišuje od rovnomerného priamočiareho pohybu. V prvom Newtonovom zákone pokoj a rovnomerný priamočiary pohyb sú považované za rovnocenné pohybové stavy telesa. V každom z týchto stavov teleso zotrváva tak dlho, pokiaľ pôsobenie iných telies ich nezmení.

Zákon sily

Druhý Newtonov zákon (zákon sily) hovorí, že *časová zmena hybnosti telesa je rovná sile pôsobiacej na teleso*. Možno ho vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})\,, \tag{1.58}$$

v ktorom $\boldsymbol{F}$ je výslednica všetkých síl pôsobiacich na teleso a $\boldsymbol{p}$, m a $\boldsymbol{v}$ sú hybnosť, hmotnosť a rýchlosť telesa. Vo všeobecnosti hmotnosť m môže byť premennou veličinou závislou od rýchlosti v (rov. 1.56). V klasickej fyzike pri mechanickom pohybe telies prichádzajú do úvahy iba zanedbateľné rýchlosti v porovnaní s rýchlosťou svetla. V takých prípadoch hmotnosť možno považovať za konštantnú a rovnicu (1.58) vyjadriť v tvare

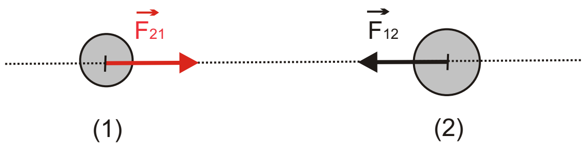
$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}\,. \tag{1.59}$$

Podľa tejto rovnice sila pôsobiaca na teleso je rovná súčinu hmotnosti a zrýchlenia telesa.

Jednotkou sily je newton (N). Je to sila, ktorá telesu s hmotnosťou 1 kg udeľuje zrýchlenie 1 ms^{-2}. Z rovnice (1.59) vyplýva, že 1 $N = 1\ kgms^{-2}$.

Zákon akcie a reakcie

Zo skúsenosti vieme, že vzájomné pôsobenie telies je obojstranné. Uviedli sme, že teleso položené na podložke pôsobí na ňu silou, ktorá je rovná tiaži telesa. Na druhej strane aj podložka pôsobí na teleso rovnako veľkou tlakovou silou v opačnom smere. Keď sa oprie človek rukami o stôl, pôsobí aj stôl tlakovou silou na ruky. Mesiac obiehajúci okolo Zeme je Zemou priťahovaný, na druhej strane aj Mesiac priťahuje k sebe Zem rovnako veľkou silou. Všeobecne môžeme povedať, že keď teleso 1 pôsobí na teleso 2 silou $\boldsymbol{F}_{12}$ potom teleso 2 pôsobí na teleso 1 silou $\boldsymbol{F}_{21}$ (obr. (1.10)).



Obrázok 1.10 Silové pôsobenie medzi dvoma hmotnými bodmi. $\boldsymbol{F}_{21}$ je sila, ktorou hmotný bod (2) pôsobí na hmotný bod (1).

Jedna z týchto síl sa nazýva *akcia* a druhá je *reakcia*. Zákon akcie a reakcie hovorí, že *každá akcia vyvoláva opačnú a rovnako veľkú reakciu, alebo sily, ktorými na seba pôsobia dve telesá sú rovnako veľké, ale opačne orientované*. Tretí Newtonow zákon možno vyjadriť pomocou rovnice

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}\,. \tag{1.60}$$

Treba si uvedomiť, že každá zo síl pôsobí na iné teleso, preto tieto sily nemožno skladať a taktiež sa vzájomne nerušia. Na druhej strane, tiažová sila $\boldsymbol{F}_g$, o ktorej budeme hovoriť v ďalšej časti, pôsobiaca na teleso nachádzajúce sa na podložke a tlaková sila, ktorou pôsobí podložka na toto teleso sa navzájom kompenzujú. Tieto dve sily pôsobia na to isté teleso a netvoria akciu a reakciu.

1.2.2 Niektoré typy síl

V tejto časti je podaná charakteristika síl, ktoré sú užitočné pri riešení viacerých úloh alebo pri vysvetľovaní problémov v ďalších kapitolách.

Tiažová sila

Sila, ktorou Zem (alebo iný astronomický objekt) pôsobí na telesá nachádzajúce sa v blízkosti povrchu a udeľuje mu zrýchlenie voľného pádu $\boldsymbol{g}$, sa nazýva *tiažová sila* $\boldsymbol{F}_g$.

Táto sila pri voľnom páde udeľuje všetkým telesám na tom istom mieste zemského povrchu rovnaké zrýchlenie, preto podľa rovnice (1.59) súvis medzi tiažovou silou $\boldsymbol{F}_g$ a zrýchlením $\boldsymbol{g}$ je vyjadrený vzťahom

$$\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}\,. \tag{1.61}$$

Tiažové zrýchlenie $\boldsymbol{g}$ a tým aj tiažová sila sa menia v závislosti od zemepisnej šírky a nadmorskej výšky telesa. Na ilustráciu uvádzame hodnotu tiažového zrýchlenia[2] v Košiciach, $g = 9,809ms^{-2}$, kde severná zemepisná šírka $\varphi = 48°\,43''$ a nadmorská výška $h = 220m$.

Teleso nachádzajúce sa na zemskom povrchu pôsobí na podložku silou, napr. na osobné váhy pri vážení, ktorú nazývame *tiaž* $\boldsymbol{G}$. Veľkosť a smer tejto sily sú také isté ako v prípade tiažovej sily a rozdiel je iba v pôsobisku sily. Tiažová sila $\boldsymbol{F}_g$ pôsobí na teleso a tiaž $\boldsymbol{G}$ pôsobí na podložku, na ktorej sa teleso nachádza.

Sily pri krivočiarom pohybe

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že zrýchlenie hmotného bodu možno pri krivočiarom pohybe rozložiť na tangenciálnu a normálovú zložku, pre ktoré platia vzťahy

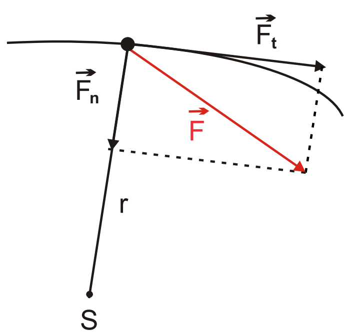
$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}\,, \qquad \boldsymbol{a}_n = -\frac{v^2}{r}\boldsymbol{\rho}\,, \tag{1.62}$$

v ktorých v je veľkosť okamžitej rýchlosti a r je polomer krivosti trajektórie v mieste, v ktorom pohyb hmotného bodu vyšetrujeme. Pomocou rovnice (1.59) môžeme vyjadriť aj tangenciálnu $\boldsymbol{F}_t$ a normálovú $\boldsymbol{F}_n$ zložku sily pôsobiacu na hmotný bod. Zrejme platí

$$\boldsymbol{F}_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{F}_n = -m\frac{v^2}{r}\boldsymbol{\rho}, \tag{1.63}$$

pričom výslednica týchto síl (obr. 1.11)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_n. \tag{1.64}$$



Obrázok 1.11 Rozklad sily na tangenciálnu a normálovú zložku pri krivočiarom pohybe.

Tangenciálna zložka sily, ktorej veľkosť $F_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ spôsobuje zmenu veľkosti rýchlosti a normálová sila, ktorej hodnota $F_n = m\frac{v^2}{r}$ zapríčiňuje zmenu smeru pohybu. Normálová sila sa kvôli svojej orientácii nazýva *dostredivou silou*. Touto silou na hmotný bod (teleso) pôsobí väzba, ktorá núti hmotný bod sa pohybovať po

[2] Hodnota tiažového zrýchlenia sa vypočíta podľa Hayfordovho empirického vzťahu $g = 9,78049(1 + 0,005288\sin^2\varphi - 0,000006\sin^2 2\varphi) - 0,000002h$, v ktorom φ je severná alebo južná zemepisná šírka a h je nadmorská výška.

zakrivenej trajektórii. Väzbou môže byť napr. lano, na ktorom je upevnené kružiace teleso, povrch vozovky, ktorý trecou silou pôsobí na pneumatiky a spôsobuje pohyb auta po zakrivenej trajektórii, gravitačné pole Zeme pôsobiace na Mesiac pohybujúci sa okolo Zeme a pod. V uvedených prípadoch dostredivá sila je reprezentovaná ťahovou silou lana, trecou silou vozovky a gravitačnou silou Zeme. Z týchto príkladov je zrejmé, že dostredivá sila nereprezentuje nový druh sily.

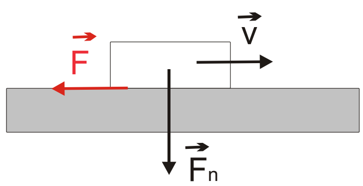
Podľa zákona akcie a reakcie (rov. (1.60)) hmotný bod pôsobí rovnako veľkou silou ale opačného smeru na teleso, ktoré krivočiary pohyb spôsobuje. Nazývame ju *odstredivou silou*.

V prípade rovnomerného otáčavého pohybu po kružnici tangenciálna sila je rovná nule a na hmotný bod pôsobí len konštantná dostredivá sila smerujúca do stredu kružnice. Bez tejto sily pohyb po kružnici by nemohol existovať. Ak v určitom okamihu by dostredivá sila prestala na hmotný bod pôsobiť, hmotný bod by začal vykonávať rovnomerný priamočiary pohyb.

Odporová sila pri vonkajšom trení

Zvláštne postavenie medzi silami majú sily trenia. Ich zvláštnosť spočíva v tom, že vo forme odporu pôsobia vždy len proti pohybu telies, zatiaľ čo iné sily môžu pohyb ako podporovať tak aj brzdiť.

S prejavom *vonkajšieho trenia* sa stretávame v dvoch prípadoch. Odporovú silu (odpor) pozorujeme, keď sú dve telesá k sebe pritlačované istou silou, telesá sú vzhľadom k sebe v kľude a vonkajšie sily sa ich snažia uviesť do relatívneho pohybu. Príslušné trenie sa nazýva *statické* a vždy pôsobí proti vzniku relatívneho pohybu. Odpor vzniká aj pri pohybe tuhého telesa po inom telese, ku ktorému je pritlačované istou silou. V tomto prípade hovoríme o *dynamickom trení* alebo aj *kinetickom trení* (trení za pohybu), ktoré sa prejavuje od okamihu, keď nastal relatívny pohyb telies, je namierené vždy proti rýchlosti pohybu a má tendenciu túto rýchlosť zmenšiť.



Obrázok 1.12 Trenie v šmyku. Trecia sila $\boldsymbol{F}$ je orientovaná proti smeru, v ktorom pohyb chceme vyvolať (statické trenie), alebo proti smeru pohybu (dynamické trenie).

Podľa charakteru dotyku telies pri relatívnom pohybe hovoríme o *trení v šmyku* (tiež *klznom* alebo *vlečnom*) alebo o *trení valivom*. Pri šmykovom trení sila trenia $\boldsymbol{F}$ vždy pôsobí v dotyčnicovej rovine spoločnej styčnej plochy (obr. 1.12). Veľkosť sily trenia F nezávisí na veľkosti styčnej plochy a je úmerná veľkosti normálovej sily F_n, ktorou je jedno teleso pritláčané k druhému.

Pre hodnoty trenia v šmyku možno s pomerne dobrým priblížením písať empiricky získané vzťahy

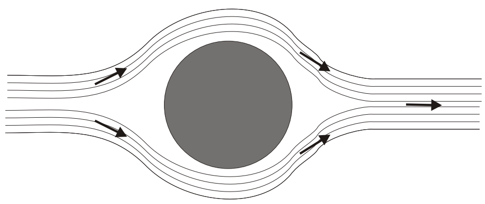
$$F = \mu F_n\,, \qquad \text{resp.} \qquad F^{'} = \mu' F_n\,, \tag{1.65}$$

v ktorých statické trenie F odpovedá okamihu, ktorý je tesne pred uvedením telesa do pohybu, čiže je to maximálna hodnota trecej sily a μ a μ' sú konštanty úmernosti nazývané *faktormi šmykového trenia* (μ - statického, μ' - kinetického), pre ktoré platí $\mu > \mu'$. Faktory trenia μ a μ' závisia od materiálov stýkajúcich sa telies a od akosti styčných plôch (hladkosti, resp. drsnosti).

Pri valivom pohybe jedného telesa po inom telese sa uplatňuje valivé trenie, pre ktoré možno formálne písať tie isté vzťahy (1.65) ako pre trenie v šmyku. Faktor valivého trenia je vždy omnoho menší ako faktor trenia v šmyku, najmä ak podložka a valiace sa teleso sú z tvrdého a pružného materiálu.

Odporová sila pri vnútornom trení

Na teleso pohybujúce sa v reálnej tekutine pôsobí sila, ktorá je orientovaná proti smeru pohybu telesa. Je to odporová sila a experimenty ukazujú že závisí od tvaru a rozmerov pohybujúceho sa telesa, od jeho rýchlosti a závisí aj od vlastností tekutiny.

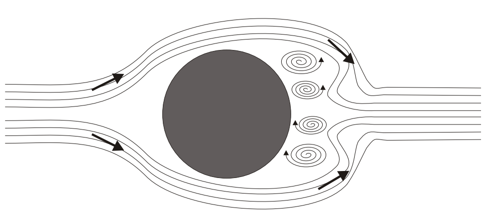


Obrázok 1.13 Laminárne prúdenie tekutiny okolo telesa.

Všeobecný vzťah pre výpočet odporovej sily neexistuje. V prípade telesa tvaru guľôčky, ktorá sa pohybuje dostatočne malou rýchlosťou, t. j. takou, aby obtekanie telesa bolo laminárne (obr. 1.13), pri ktorom sa v tekutine netvoria víry, tekutina kladie odpor F, ktorý je úmerný jeho rýchlosti v a je orientovaný proti smeru pohybu. Môžeme ho vyjadriť vzťahom (*Stokesov vzorec*)

$$F = -Kv\,, \tag{1.66}$$

v ktorom konštanta úmernosti $K = 6\pi\eta r$, kde η je *koeficient dynamickej viskozity* (koeficient vnútorného trenia) a r je polomer guľôčky.



Obrázok 1.14 Turbulentné prúdenie tekutiny okolo telesa sa pozoruje v prípadoch, keď prúdenie prekročí kritickú rýchlosť.

Pri vyšších rýchlostiach, pri ktorých sa za pohybujúcim telesom tvoria víry (1.14), závislosť odporu od rýchlosti nie je lineárna a odporová sila sa vypočíta podľa *Newtonovho vzorca*

$$F = CS\frac{1}{2}\rho v^2, \tag{1.67}$$

v ktorom S je plocha prierezu telesa v smere kolmom na smer pohybu a ρ je hustota tekutiny. Bezrozmerná konštanta C závisí od tvaru telesa a napr. ak telesom je guľa $C = 0,37$, pre teleso tvaru kvapky $C = 0,08$.

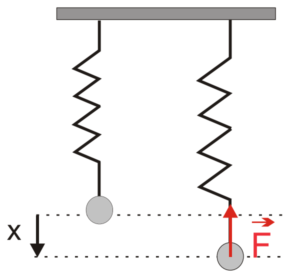
Odporová sila sa pozoruje v dôsledku existencie *vnútorného trenia* v tekutine, ktoré sa prejavuje aj tým, že susedné vrstvy v prúdiacej tekutine sa nepohybujú rovnakými rýchlosťami. Každá vrstva prúdiacej tekutiny je pohybom susednej vrstvy zrýchľovaná alebo spomaľovaná. Sily vnútorného trenia sa nazývajú aj *viskóznymi silami*.

Sily pružnosti

Sily pružnosti vznikajú pri deformácii telies, ako je to napr. pri stlačení alebo natiahnutí pružiny. Po odstránení príčin deformácie sa deformované teleso snaží práve pod vplyvom síl pružnosti vrátiť späť do pôvodného stavu, v ktorom bolo pred deformáciou. Ak vonkajšia sila vychýli pružinu z rovnovážnej polohy o dĺžku x, potom podľa *Hookovho zákona* sila pružnosti F, ktorá je v rovnováhe s vonkajšou silou, je úmerná výchylke x (obr. 1.15). T. j.

$$F = -kx, \tag{1.68}$$

kde k je kladná konštanta úmernosti (*tuhosť pružiny*), ktorej hodnota závisí od elastických vlastnosti pružiny.



Obrázok 1.15 Sila pružnosti $\boldsymbol{F}$, ktorá pôsobí na teleso zavesené na pružine je úmerná výchlke x a je orientovaná proti smeru výchylky.

Elastické vlastnosti závisia od materiálu, z ktorého je pružina zhotovená a od geometrických rozmerov pružiny.

Pomocou záporného známienka v rov. (1.68) je zohľadnená skutočnosť, že sila pružnosti je stále orientovaná proti smeru výchylky (obr. 1.15).

1.2.3 Pohybové rovnice

Druhý Newtonov zákon (rov. (1.59)) je základnou rovnicou dynamiky. Jej hlavný význam spočíva v tom, že pomocou nej je možné vyšetriť priebeh pohybu hmotného bodu, t. j. vieme vypočítať závislosť rýchlosti od času, vypočítať trajektóriu a dráhu pohybu. Vo všeobecnosti sila môže byť funkciou času t, rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a polohy hmotného bodu, ktorú môžeme určiť pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}$. Pohybovú rovnicu môžeme vyjadriť vo vektorovom tvare

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.69}$$

alebo, ak pohyb vzťahujeme k počiatku pravouhlej súradnicovej sústavy, potom vektorovú rovnicu (1.69) môžeme nahradiť skalárnymi rovnicami

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.70a}$$

$$F_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.70b}$$

$$F_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.70c}$$

Rýchlosť a dráha hmotného bodu nezávisia len od pôsobiacej sily, ale aj od počiatočných podmienok, t. j. od rýchlosti a dráhy v okamihu, keď na hmotný bod začala pôsobiť sila. Z uvedených dôvodov uvažovanú úlohu môžeme riešiť vtedy, keď okrem sily sú známe aj počiatočné podmienky. Rovnice (1.70) sú vo všeobecnosti diferenciálne rovnice, ktoré sa riešia špeciálnymi matematickými postupmi. V jednoduchších prípadoch, ak zložky sily F_x, F_y a F_z sú len funkciami času t, z rovníc (1.70) vyplývajú pre zložky rýchlosti vzťahy

$$v_x = \frac{1}{m}\int F_x \mathrm{d}t + v_{0x}\,, \tag{1.71a}$$

$$v_y = \frac{1}{m}\int F_y \mathrm{d}t + v_{0y}\,, \tag{1.71b}$$

$$v_z = \frac{1}{m}\int F_z \mathrm{d}t + v_{0z} \tag{1.71c}$$

a pomocou nich známym postupom možno určiť súradnice trajektórie pohybu

$$x = \int v_x \mathrm{d}t + x_0\,, \tag{1.72a}$$

$$y = \int v_y \mathrm{d}t + y_0\,, \tag{1.72b}$$

$$z = \int v_z \mathrm{d}t + z_0\,. \tag{1.72c}$$

Integračné konštanty v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} a x_0, y_0 a z_0 v rovniciach (1.71) a (1.72) sú určené počiatočnými podmienkami, ktorými vo všeobecnosti rozumieme súradnice hmotného bodu a zložky jeho rýchlosti v ľubovoľne zvolenom okamihu t_0.

Teda, ak napr. poznáme sily vzájomného pôsobenia medzi Slnkom a planétami, ako aj súradnice a rýchlosti planét v určitom okamihu (t. j. počiatočné podmienky), môžeme určiť pohybový stav telies, ktorý bol pred mnohými rokmi a predpovedať polohu planét na mnoho rokov dopredu. Touto metódou je možné predpovedať zatmenie Mesiaca a Slnka alebo určiť čas, v ktorom Mars sa nachádza najbližšie k Zemi.

Ak poznáme rýchlosť rakety napr. v okamihu, keď dohorí palivo, jej súradnice v nejakom okamihu a sily pôsobiace na raketu, vieme vypočítať trajektóriu po ktorej sa raketa pohybuje, určiť jej polohu v hociktorom okamihu a čas a miesto pristatia.

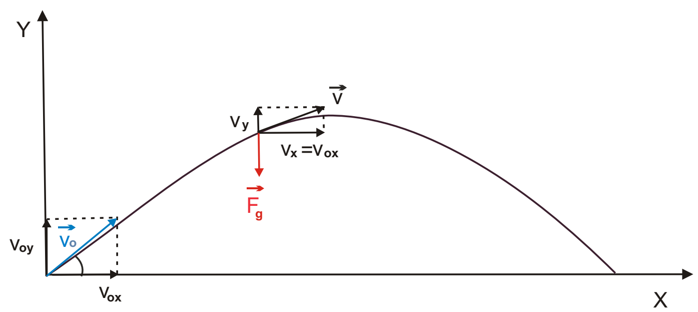
Pohybové rovnice majú široké uplatnenie v rôznych oblastiach fyziky a technickej praxe.[3] Ich použitie sa pokúsime ilustrovať na niekoľkých užitočných príkladoch.

Pohyb telesa v poli zemskej tiaže

Priestor, pre ktorý v každom jeho mieste je definovaná sila pôsobiaca na objekt nachádzajúci sa v uvažovanom priestore, sa nazýva *silové pole*. To znamená, že silovým poľom je priestor, v ktorom je definovaná funkcia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$. Ak sila pôsobiaca na hmotný bod má v každom mieste poľa rovnakú veľkosť a rovnaký smer, také silové pole sa nazýva *homogénne*.[4]

Tiažová sila pôsobiaca na teleso závisí od jeho polohy v okolí Zeme. No v mnohých významných prípadoch sa pohyb realizuje v priestore dostatočne malom na to, aby v každom mieste uvažovaného priestoru mohla byť tiažová sila považovaná za konštantnú. Uvažované pole je teda homogénne a budeme ho nazývať *pole zemskej tiaže*.

Nech v určitom mieste uvažovaného poľa zemskej tiaže je hmotnému bodu udelená rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$, ktorá s vodorovným smerom zviera uhol α. Teleso sa bude pohybovať v jednej (zvislej) rovine, preto pre skúmanie pohybu stačí uvažovať dvojrozmerný súradnicový systém, ktorého počiatok umiestnime do miesta, v ktorom telesu je udelená rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ (obr. 1.16).



Obrázok 1.16 Pohyb telesa vrhnutého počiatočnou rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$ v poli zemskej tiaže. Z riešenia pohybových rovníc pri šikmom vrhu vyplýva, že trajektóriou pohybu telesa vplyvom sily $\boldsymbol{F}_g$ je parabola.

Ak zanedbáme odpor vzduchu, na hmotný bod v ľubovoľnom mieste trajektórie pôsobí len tiažová sila

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}\,, \qquad (1.73)$$

ktorej zložky v uvažovanej sústave majú veľkosti

$$\begin{aligned} F_x &= 0\,, & (1.74a)\\ F_y &= -mg\,. & (1.74b) \end{aligned}$$

Znamienko mínus v rovnici (1.74b) vyjadruje tú skutočnosť, že smer tiažovej sily je opačný smer, než je orientácia osi Y. Použitím rovníc (1.71) dostaneme pre zložky rýchlosti v ľubovoľnom okamihu t vzťahy

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x}\,, & (1.75a)\\ v_y &= -gt + v_{0y}\,. & (1.75b) \end{aligned}$$

[3] Z uvedených príkladov vyplýva, že Newtonova mechanika je úspešná pri riešení rôznych dynamických problémov, no napriek tomu nie je to metóda univerzálna. Pohybové rovnice nie je možné použiť v oblasti mikrosveta pri riešení subatómarných problémov.

[4] Otázkami silových polí sa budeme podrobne zaoberať v ďalších kapitolách.

Pomocou rovníc (1.72) pre súradnice trajektórie pohybu dostaneme

$$x = \int v_x \mathrm{d}t + x_0 = v_{0x}t + x_0\,, \tag{1.76a}$$

$$y = \int v_y \mathrm{d}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0\,. \tag{1.76b}$$

Z počiatočných podmienok, v našom prípade z polohy a rýchlosti hmotného bodu v čase $t = 0$, vyplýva, že integračné konštanty sú: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ a $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Po zohľadnení počiatočných podmienok môžeme vyjadriť rýchlosť a polohu hmotného bodu pomocou rovníc

$$v_x = v_0 \cos\alpha\,, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt\,, \tag{1.77}$$

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{1.78}$$

V závislosti od uhla α rozlišujeme tri špeciálne prípady pohybu. Ak $\alpha = 0°$ dostávame rovnice pre *vrh vodorovný*, ak $\alpha = 90°$ je to *vrh zvislý* a ak α nadobúda hodnoty medzi 0° a 90° hovoríme o *šikmom vrhu*. Z rovníc (1.78) vyplýva, že trajektóriou pohybu pri šikmom vrhu je parabola.

Padanie telesa v tekutine

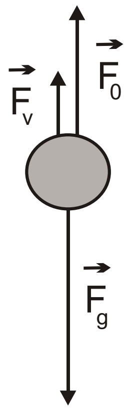
V predošlých úvahách sme pri skúmaní pohybu v poli zemskej tiaže zanedbali odpor vzduchu. Pri pohybe telesa v tekutine (v plyne alebo v kvapaline) odpor prostredia proti pohybu a ani vztlakovú silu často nie je možné zanedbať. Napríklad je rozdiel, či vo vzduchu padá oceľová guľôčka alebo stolnotenisová loptička, je rozdiel či oceľová guľôčka padá vo vzduchu alebo v oleji a pod. Je teda zrejmé, že v niektorých prípadoch treba okrem tiažovej sily zohľadniť ďalšie dve sily. Odporová sila $\boldsymbol{F_o}$ je namierená proti smeru pohybu a ak pohybujúcim sa telesom je guľôčka, potom podľa Stokesovho vzorca (1.66) veľkosť tejto sily je úmerná rýchlosti guľôčky a jej smer je opačný ako smer pohybu guľôčky. Veľkosť vztlakovej sily F_v sa určí podľa dobre známeho *Archimedovho zákona*. Vztlaková sila $\boldsymbol{F_v}$ je opačne orientovaná ako tiažová sila $\boldsymbol{F_g}$. Všetky tri sily ležia v tej istej priamke (obr. 1.17) a ich veľkosť a smer môžeme vyjadriť rovnicami:

$$F_g = +mg\,, \tag{1.79a}$$

$$F_o = -Kv\,, \tag{1.79b}$$

$$F_v = -m'g\,, \tag{1.79c}$$

v ktorých za kladný smer je považovaný smer tiažovej sily $\boldsymbol{F_g}$, m je hmotnosť guľôčky, m' je hmotnosť tekutiny s objemom rovným objemu guľôčky a K je konštanta (pozri rovnicu (1.66)).



Obrázok 1.17 Na teleso padajúce v tekutine pôsobí vzlaková sila $\boldsymbol{F}_v$, odporová sila $\boldsymbol{F}_o$ a tiažová sila $\boldsymbol{F}_g$, ktorá má opačný smer ako sily $\boldsymbol{F}_v$ a $\boldsymbol{F}_o$.

Vidíme, že výslednica všetkých síl

$$F = mg - m'g - Kv \tag{1.80}$$

je funkciou rýchlosti guľôčky, t. j. $F = F(v)$. Vypočítajme, aká je závislosť rýchlosti guľôčky od času, ktorá je voľne pustená do tekutiny a pohybuje sa vplyvom vyššie spomenutých síl. Pohyb sa uskutočňuje po priamke, preto pri riešení úlohy je potrebné použiť len jednu z troch pohybových rovníc (1.70). Pomocou sily (1.80) a pohybovej rovnice vo všeobecnom tvare $F = m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ dostaneme pohybovú rovnicu pre padanie guľôčky v tekutine. Po jednoduchých úpravách dostaneme vzťah

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta mg}{m} - \frac{K}{m}v\,, \tag{1.81}$$

v ktorom pomocou symbolu Δm sme označili rozdiel hmotnosti $m - m'$. Rovnica (1.81) je diferenciálnou rovnicou 1. rádu a môžeme ju riešiť tak, že premenné v a t od seba oddelíme (metóda separácie premenných). Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{m}(v_k - v)\,, \tag{1.82}$$

pričom pomocou konštanty v_k, ktorá má význam rýchlosti, sme označili zlomok $\frac{\Delta mg}{K}$. Po ďalšej úprave dostaneme rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}v}{(v_k - v)} = \frac{K}{m}\mathrm{d}t\,, \tag{1.83}$$

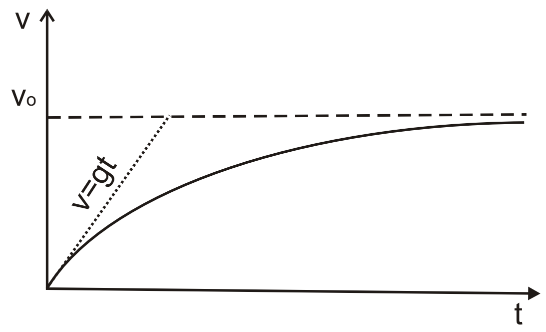
ktorú vieme integrovať. Integráciou rovnice so separovanými premennými dostaneme

$$-\ln(v_k - v) = \frac{K}{m}t + C\,. \tag{1.84}$$

Integračnú konštantu C určíme z podmienky, že v čase $t = 0$ guľôčka bola v pokoji a teda rýchlosť v tomto okamihu $v = 0$. Po dosadení týchto hodnôt do rovnice (1.84) pre integračnú konštantu dostaneme $C = -\ln v_k$. Ďalšou úpravou dostaneme hľadanú závislosť rýchlosti v od času t, pre ktorú platí

$$v = v_k\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) = v_k\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{1.85}$$

Vidíme, že odvodená závislosť rýchlosti od času má zložitejší priebeh (obr.) než pri voľnom páde (v = gt), keď na teleso pôsobí len tiažová sila. Rýchlosť exponenciálne narastá a teoreticky po nekonečne veľkej dobe nadobúda limitnú hodnotu $v_k = \frac{\Delta mg}{K}$. Z rovnice (1.80) vyplýva, že guľôčka nadobúda túto rýchlosť v okamihu, keď výslednica všetkých síl $F = 0$.



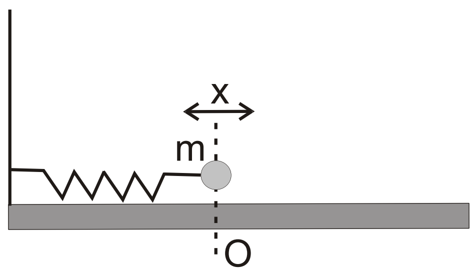
Obrázok 1.18 Grafické znázornenie závislosti rýchlosti guľôčky padajúcej v tekutine od času. Rýchlosť guľôčky exponenciálne rastie k limitnej hodnote v_0. Bodkovaná čiara znázorňuje závislosť rýchlosti od času pri zanedbaní vztlakovej a odporovej sily, t. j. pri voľnom páde.

Nárast rýchlosti guľôčky charakterizuje *časová* konštanta $\tau = \frac{m}{K}$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že po čase $t = 5\tau$ hodnota rýchlosti je $\approx 0,99 v_k$. Teda už po relatívne krátkom čase $t = 5\tau$ rýchlosť guľôčky je prakticky konštantná a je rovná hodnote limitnej rýchlosti v_k. Guľôčka od uvedeného okamihu sa v tekutine pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom. Tento poznatok je možné využiť pri skúmaní vlastností tekutín a napr. z nameranej rýchlosti v_k je možné vypočítať koeficient dynamickej viskozity η.

Závislosť veľkosti dráhy s, ktorú urazí guľôčka za dobu t, sa vypočíta použitím dobre známeho postupu pomocou rovníc (1.11) a (1.85). Tento výpočet prenechávame na čitateľa.

Pohyb telesa vplyvom pružnej sily

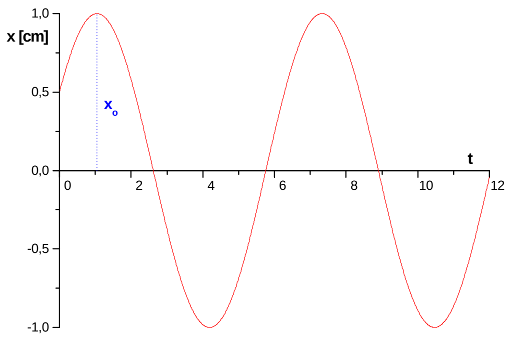
Usporiadajme experiment tak, že na vodorovnú podložku položíme pružinu, jeden jej koniec uchytíme o stenu a na druhý upevníme teleso o hmotnosti m (obr. 1.19).



Obrázok 1.19 Kmitavý pohyb guľôčky vplyvom sily pružnosti.

Počiatok súradnicového systému si zvoľme v bode, v ktorom sa nachádza teleso, keď pružina nie je deformovaná. Po deformácií (stlačení alebo natiahnutí) pružiny, ktorá je charakterizovaná tuhosťou k, teleso začne vykonávať kmitavý pohyb po priamke, ktorú stotožníme s osou X zvolenej súradnicovej sústavy. Budeme predpokladať, že odpor vzduchu a aj trecia sila sú zanedbateľne malé a pri vyšetrovaní pohybu ich nebudeme uvažovať. Teda pohyb sa bude realizovať jedine vplyvom sily pružnosti $F = -kx$ (rov. (1.68)), ktorá ako vidíme, je vyjadrená ako funkcia polohy hmotného bodu, t. j. pomocou výchylky x. Vypočítajme, aká je závislosť výchylky x hmotného bodu od času t. Pre náš účel je vyhodné vyjadriť pohybovú rovnicu (1.70a) v tvare $F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, do ktorej po dosadení sily pružnosti dostaneme

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,. \tag{1.86}$$



Obrázok 1.20 Guľôčka pohybujúca sa vplyvom sily pružnosti vykonáva harmonický kmitavý pohyb, pri ktorom závislosť rýchlosti od času popisuje rovnica $x = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$. Hodnoty amplitúdy x_0 a počiatočnej fázy α sú určené počiatočnými podmienkami. V znázornenej závislosti amplitúda kmitov $x_0 = 1cm$ a počiatočná fáza $\alpha = 30°$

Použitím substitúcie

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{1.87}$$

a jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0\,. \tag{1.88}$$

Odvodená pohybová rovnica (1.88) je z matematického hľadiska diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientami a bez pravej strany. Pokúsime sa nájsť všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice. Charakteristickou rovnicou k rovnici (1.88) je kvadratická rovnica

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0\,, \tag{1.89}$$

ktorej korene sú: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, preto, ako vieme z prednášok z matematickej analýzy, diferenciálnej rovnici vyhovujú funkcie

$$e^{+i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t\,, \tag{1.90a}$$
$$e^{-i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t\,. \tag{1.90b}$$

Všeobecným riešením uvažovanej diferenciálnej rovnice je lineárna kombinácia

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t\,, \tag{1.91}$$

ktorá po substitúciach konštánt C_1 a C_2 ($C_1 = x_0\sin\alpha$, $C_2 = x_0\cos\alpha$) nadobúdne tvar

$$x = x_0\sin(\omega_0 t + \alpha)\,. \tag{1.92}$$

Riešením diferenciálnej rovnice je závislosť výchylky x od času t, ktorá je znázornená na obr. 1.20

Z riešenia pohybovej rovnice vyplýva, že teleso vplyvom pružnej sily vykonáva periodický, harmonický pohyb s *amplitúdou* x_0 a *uhlovou frekvenciou* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. α sa nazýva počiatočná fáza alebo fázová konštanta. Výpočet závislosti rýchlosti a zrýchlenia od času opäť prenechávame na čitateľa. Otázkami kmitavého pohybu sa budeme podrobne zaoberať v ďalších kapitolách.

1.2.4 Pohybová rovnica pri otáčavom pohybe. Moment sily a moment hybnosti

Nech hmotný bod sa voči vzťažnému bodu O nachádza v pokoji a nech jeho poloha je určená pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}$. Predpokladajme, že na hmotný bod pôsobí sila $\boldsymbol{F}_{\|}$, ktorá je stále rovnobežná s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ (obr. 1.27). Vplyvom tejto sily sa hmotný bod bude pohybovať po priamke určenej polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, hmotný bod nebude meniť svoj smer, t. j. vplyvom uvedenej sily sa nebude otáčať vzhľadom k vzťažnému bodu O. Je zrejmé, že hmotný bod sa bude otáčať vzhľadom k bodu O, len ak pôsobiaca sila má zložku $\boldsymbol{F}_{\perp}$, ktorá je kolmá na polohový vektor $\boldsymbol{r}$. Teda za určitých okolností sila pôsobiaca na hmotný bod môže spôsobiť jeho otáčavý (obežný) pohyb.

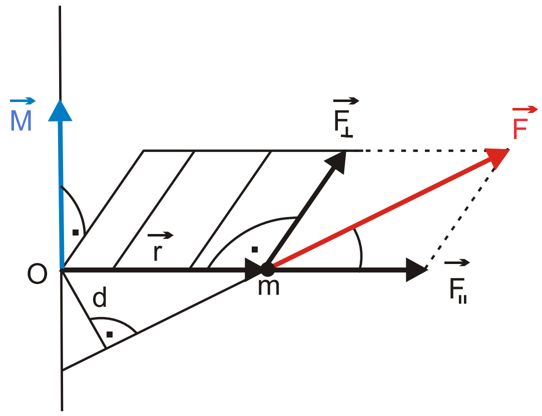
Pre skúmanie otáčavého pohybu je výhodné definovať *moment sily* a *moment hybnosti*. Moment sily $\boldsymbol{M}$ vzhľadom k vzťažnému bodu O je definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \tag{1.93}$$

v ktorom $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\boldsymbol{F}$ (obr.). Pre veľkosť momentu sily platí

$$M = rF \sin\varphi = Fd\,, \tag{1.94}$$

kde φ je uhol, ktorý zviera polohový vektorom $\boldsymbol{r}$ so silou $\boldsymbol{F}$; $d = r\sin\varphi$ je rameno sily.



Obrázok 1.21 Vektor momentu sily $\boldsymbol{M}$ leží v priamke, ktorá je kolmá na rovinu určenú vektorom sily $\boldsymbol{F}$ a polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$.

Silu $\boldsymbol{F}$ môžeme rozložiť na dve zložky, z ktorých jedna $\boldsymbol{F}_{\perp}$ je kolmá na polohový vektor $\boldsymbol{r}$ a druhá $\boldsymbol{F}_{\|}$ je s ním rovnobežná. V takom prípade

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \left(\boldsymbol{F}_{\perp} + \boldsymbol{F}_{\|}\right) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\perp}. \tag{1.95}$$

Z uvedeného vyplýva, že k momentu sily prispieva len tá zložka sily, ktorá má otáčavý účinok vzhľadom k vzťažnému bodu O. Moment tej zložky sily, ktorá nespôsobuje otáčanie je $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\|} = 0$.

Ak v mieste, ktoré vzhľadom k vzťažnému bodu O je určené polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, sa nachádza hmotný bod o hmotnosti m a hybnosti $\boldsymbol{p}$, potom *moment hybnosti* $\boldsymbol{L}$ hmotného bodu vzhľadom k bodu O je definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}. \tag{1.96}$$

Zistíme, aký je súvis medzi momentom sily pôsobiacim na hmotný bod a momentom hybnosti hmotného bodu. Ak silu vo vzťahu (1.93) vyjadríme pomocou zákona sily $\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ dostaneme

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.97}$$

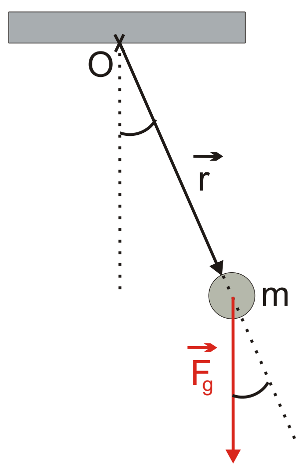
Vo výpočte sme zohľadnili skutočnosť, že $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} = 0$. Odvodený vzťah

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{1.98}$$

je *pohybovou rovnicou pre otáčavý pohyb hmotného bodu*, ktorá hovorí, že *časová zmena momentu hybnosti vzhľadom k ľubovoľnému vzťažnému bodu je rovná momentu pôsobiacej sily vzhľadom k tomu istému bodu*. Vidíme, že pohybová rovnica pre otáčavý pohyb (1.98) je formálne zhodná so základnou pohybovou rovnicou $\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$. Na ilustráciu použitia rovnice (1.98) vyšetríme pohyb guľôčky zavesenej na niti, ak guľôčka sa pohybuje vplyvom zemskej tiaže.

Kyvadlový pohyb hmotného bodu

Skúmajme pohyb malej guľôčky o hmotnosti m zavesenej na niti dĺžky l, ktorá má zanedbateľnú hmotnosť voči hmotnosti guľôčky. Ak guľôčku vychýlime z rovnovážnej polohy a potom ju pustíme, guľôčka začne vykonávať otáčavý pohyb okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza bodom upevnenie nite O (obr. 1.27).



Obrázok 1.22 Guľôčka zavesená na niti vykonáva kyvadlový pohyb vplyvom tiažovej sily $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$ okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza bodom upevnenia O. Uhol φ vyjadruje výchylku kyvadla z rovnovážnej polohy.

Nech poloha guľôčky je vzhľadom k bodu O určená pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}$. Na guľôčku pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$, ktorej moment vzhľadom k bodu O je

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g} \tag{1.99}$$

a moment hybnosti guľôčky vzhľadom k tomu istému bodu

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}\,, \tag{1.100}$$

kde $\boldsymbol{v}$ je rýchlosť guľôčky v ľubovoľnom čase t. Z uvedených vzťahov vyplýva, že moment sily a moment hybnosti stále ležia v tej istej priamke (v osi otáčania), preto pri skúmaní pohybu guľôčky môžeme namiesto pohybovej rovnice vo vektorovom tvare (1.98) použiť skalárnu rovnicu

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.101}$$

Veľkosť momentu sily je určená vzťahom $M = lmg \sin\varphi$, v ktorom φ je uhol medzi vektorom $\boldsymbol{r}$ a tiažovým zrýchlením $\boldsymbol{g}$. Z obr. je vidieť, že pomocou uhla φ je vyjadrená aj výchylka guľôčky z rovnovážnej polohy. Ak sa obmedzíme na malé výchylky ($\varphi < 5°$), pri ktorých $\sin\varphi \approx \varphi$, moment sily pôsobiacej na guľôčku bude priamo úmerný výchylke guľôčky z rovnovážnej polohy, t. j.

$$M = -lmg\varphi\,. \tag{1.102}$$

Z rozboru pohybu guľôčky vyplýva fakt, že moment sily je stále opačne orientovaný ako je smer výchylky φ, ktorý sme v rov. (1.102) vyjadrili pomocou znamienka mínus.

Vektor rýchlosti guľôčky $\boldsymbol{v}$ a aj jej hybnosti $m\boldsymbol{v}$ sú v každom okamihu kolmé na polohový vektor $\boldsymbol{r}$ a súvis medzi veľkosťou rýchlosti v a uhlovou rýchlosťou ω je daný vzťahom $v = \omega l$. Z uvedených dôvodov pre veľkosť momentu hybnosti môžeme písať $L = lmv = l^2 m\omega$. Keďže uhlová rýchlosť $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, veľkosť momentu hybnosti môžeme vyjadriť v tvare

$$L = l^2 m \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.103}$$

Po dosadení odvodených rovníc (1.102) a (1.103) do rovnice (1.101) dostaneme pohybovú rovnicu pre otáčavý pohyb guľôčky

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \varphi = 0\,, \tag{1.104}$$

v ktorej $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Porovnaním odvodenej rovnice s pohybovou rovnicou (1.88) pre pohyb telesa vplyvom pružnej sily vidíme, že tieto rovnice majú rovnaký tvar, preto riešením diferenciálnej rovnice (1.104) je závislosť výchylky φ od času t, ktorú môžeme vyjadriť pomocou vzťahu

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\omega_0 t + \alpha\right). \tag{1.105}$$

Uvedená rovnica popisuje harmonický otáčavý pohyb guľôčky s amplitúdou φ_0 a uhlovou frekvenciou $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Otáčavý pohyb hmotného bodu alebo aj telesa okolo pevnej osi, vplyvom sily, ktorej moment stále leží v osi otáčania, avšak mení svoju veľkosť a orientáciu sa nazýva *kyvadlový pohyb*.

Guľôčka zavesená na niti, ktorá vykonáva kyvadlový pohyb sa nazýva *jednoduchým* alebo niekedy aj *matematickým kyvadlom*. Perióda jednoduchého kyvadla sa vypočíta podľa vzťahu

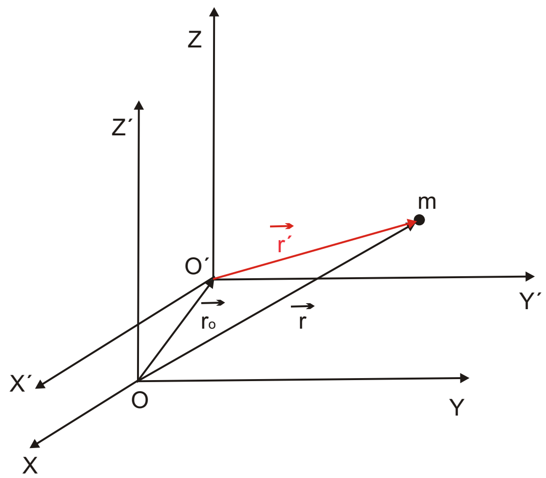
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{1.106}$$

pomocou ktorého je možné určiť hodnotu tiažového zrýchlenia g na danom mieste zemského povrchu.

1.2.5 Silové pôsobenie pri relatívnom pohybe

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali pôsobením sily na hmotný bod a skúmaním jeho pohybu v sústave, ktorú sme považovali za inerciálnu. Teraz sa budeme zaoberať silovým pôsobením z hľadiska sústav, ktoré sa voči uvažovanej inerciálnej sústave pohybujú.

Uvažujme o dvoch sústavách S a S$'$, z ktorých sústava S$'$ sa vzhľadom k S pohybuje tak, že osi týchto sústav sú stále rovnobežné (sústavy sa vzhľadom k sebe neotáčajú) a ich počiatky O a O$'$ boli v čase $t = 0$ totožné . Poloha sústavy S$'$ voči S nech je určená vektorom $\boldsymbol{r}_0$ (obr. 1.23).



Obrázok 1.23 Určenie polohy hmotného bodu vzhľadom k sústavam S a S´, ktoré sú v relatívnom pohybe. Sústava S´sa vyhľadom k S pohybuje tak, že osi obidvoch sústav sú stále rovnobežné a ich počiatky boli na začiatku pohybu totožné.

Predpokladajme, že sústava S$'$ sa voči sústave S môže pohybovať ľubovoľnou rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}$, t. j. sústava S$'$ môže byť inerciálnou alebo neinerciálnou.

Nech poloha hmotného bodu je v sústave S určená vektorom $\boldsymbol{r}$ a v sústave S$'$ nech jeho polohu určuje vektor $\boldsymbol{r}'$. Z obr. je zrejmé, že

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'. \tag{1.107}$$

Deriváciou rovnice (1.107) dostaneme vzťah pre rýchlosť $\boldsymbol{v}$ hmotného bodu v sústave S

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}', \tag{1.108}$$

v ktorom $\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$ je rýchlosť hmotného bodu v sústave S$'$. Z odvodenej rovnice (1.108) vyplýva, že všetky *telesá, ktoré sú v sústave S$'$ v pokoji ($\boldsymbol{v}' = 0$), sa v sústave S pohybujú rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$ a telesá, ktoré sa v sústave S$'$ pohybujú rýchlosťou $\boldsymbol{v}'$ majú rýchlosť $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$ v sústave S*. Odvodená rovnica (1.108) je platná pre inerciálne sústavy ($\boldsymbol{v}_0$ = konšt.) ako aj pre neinerciálne sústavy, pri ktorých $\boldsymbol{v}_0$ sa mení v závislosti od času, a nazýva sa *vetou o skladaní rýchlostí*.

Silové pôsobenie v inerciálnych sústavách

Teraz predpokladajme, že rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$ je konštantná. V takom prípade zrýchlenie hmotného bodu v sústave S je rovnaké ako v sústave S$'$ a naopak, t. j.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{1.109}$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že vo všetkých referenčných sústavách, ktoré sa voči sebe nachádzajú *v rovnomernom priamočiarom pohybe*, zrýchlenie pohybujúceho sa telesa je rovnaké. Z uvedeného rozboru vyplýva a aj experimenty potvrdzujú, že sily pôsobiace na telesá[5] sú nezávislé od voľby inerciálnej vzťažnej sústavy a pohybový zákon (1.59) má rovnaký tvar vo všetkých inerciálnych sústavach. Iná situácia sa však pozoruje, ak sústavy nie sú inerciálne.

Silové pôsobenie v neinerciálnych sústavách

Často sa stretávame s prípadmi, že napr. pri rozbiehaní alebo brzdení električky sa cestujúci správajú tak, ako keby ich niekto sácal dopredu, resp. dozadu; pri jazde autom sa teleso položené na sedadle auta pohne pri prudkom vjazde do zákruty. Tieto efekty nevyplývajú zo vzájomného pôsobenia medzi telesami, v uvedených príkladoch nikto neposôbil silou na cestujúcich v električke ani na teleso v aute, ale existujú v dôsledku toho, že ich vnímame z hľadiska neinerciálnych sústav. Sústava spojená s rozbiehajúcou sa alebo s brzdiacou električkou ako aj sústava spojená s autom, ktoré vykonáva krivočiary pohyb je neinerciálnou vzťažnou sústavou. Problémy uvedeného typu sa môžu riešiť ako z hľadiska inerciálnych, v uvedených príkladoch inerciálnou sústavou môže byť sústava spojená so Zemou) ako aj z hľadiska neinerciálnych sústav, avšak niektoré problémy dynamiky sa jednoduchšie riešia z hľadiska neinerciálnej sústavy. V ďalšom sa budeme venovať dvom typom neinerciálnych sústav, sú to sústavy s ktorými sa stretávame najčastejšie.

Najprv predpokladajme, že sústava $\mathrm{S}^{'}$ znázornená na obr. je takou neinerciálnou sústavou, ktorá vzhľadom k inerciálnej sústave S sa pohybuje priamočiaro so stálym zrýchlením $\boldsymbol{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}$. Nech hmotný bod sa v inerciálnej sústave S pohybuje so zrýchlením $\boldsymbol{a}$. Derivovaním rovnice (1.108), ktorá platí pre inerciálne aj pre neinerciálne sústavy, podľa času a jednoduchou úpravou dostaneme vzťah

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0, \tag{1.110}$$

v ktorom $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ je zrýchlenie hmotného bodu v sústave S a $\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}$ je jeho zrýchlenie v sústave S'. Vynásobením predchádzajúcej rovnice hmotnosťou m hmotného bodu dostaneme vzťah

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_z\,, \tag{1.111}$$

v ktorom $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$ je sila z hľadiska uvažovanej neinerciálnej sústavy $\mathrm{S}^{'}$, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ je interakčná sila pôsobiaca na hmotný bod a silu

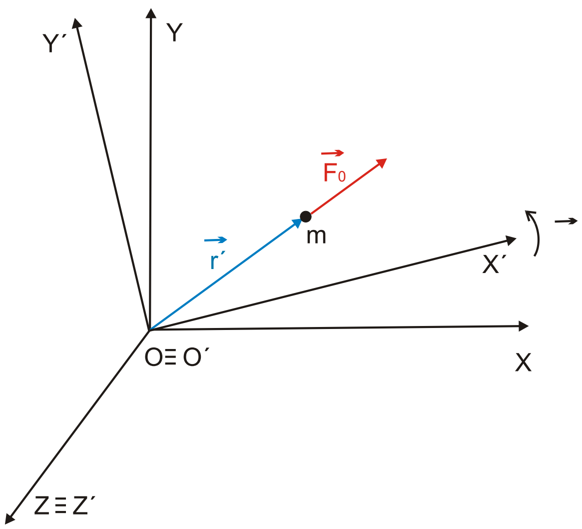
$$\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{a}_0 \tag{1.112}$$

budeme nazývať *zotrvačnou silou*. Rovnica (1.111) hovorí, že pri riešení dynamického problému z hľadiska uvažovanej neinerciálnej sústavy je potrebné ku skutočnej sile $\boldsymbol{F}$ pôsobiacej na hmotný bod pripočítať aj zotrvačnú silu $\boldsymbol{F}_z$. Je to fiktívna sila, jej existencia nemá povahu vzájomného pôsobenia a súvisí len s neinerciálnosťou vzťažnej sústavy S'. Zotrvačná sila $\boldsymbol{F}_z$ má opačný smer ako je smer zrýchlenia sústavy S'.

[5]Pripomíname, že sú to sily, ktoré existujú v dôsledku interakcie telesa s iným telesom, sú to teda interakčné sily.

Príkladom neinerciálnej sústavy pohybujúcej sa s konštantným zrýchlením $\boldsymbol{a}_0$ môže byť sústava spojená s rozbiehajúcim alebo brzdiacim vozidlom. Predstavme si teleso tvaru gule, ktoré je položené na podlahe električky. Pri rozbiehaní vozidla z pokojového stavu by cestujúci pozorovali zrýchlený pohyb gule smerom k zadnej časti električky. Uvažovaného telesa sa nikto nedotkol, preto skutočná, t. j. interakčná sila $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, je rovná nule. Pozorovaný efekt v neinerciálnej sústave je však vysvetliteľný pomocou zotrvačnej sily. Rovnakým spôsobom je možné vysvetliť zmenu tlaku na chodidlá osoby, ktorá je vo výťahu, pri jeho rozbiehaní alebo zastavovaní.

Pri riešení úloh je často výhodné vyjadriť silu v neinerciálnej sústave, ktorá vzhľadom k uvažovanej inerciálnej sústave vykonáva otáčavý pohyb. Nech sústava S′ sa vzhľadom k sústave S otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ tak, že počiatky týchto sústav sú totožné a osou otáčania je os $Z' \equiv Z$ (obr. 1.24). Bez odvodenia tu uvedieme, že v uvedenom prípade sila $\boldsymbol{F}'$ pôsobiaca na teleso, ktoré vzhľadom k sústave S' je v pokoji sa vypočíta podľa vzťahu



Obrázok 1.24 Znázornenie neinerciálnej sústavy S´ rotujúcej vzhľadom k inerciánej sústave S. Sústava S´ sa vzhľadom k S otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou ω okolo osi $Z' \equiv Z$.

$$\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a} + m\omega^2\boldsymbol{r}', \tag{1.113}$$

v ktorom $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ je opäť skutočnou silou pôsobiacou na hmotný bod. Sila $\boldsymbol{F}_0 = m\omega^2\boldsymbol{r}'$ je zdanlivá sila, ktorá sa v rovnici (1.113) objavila v dôsledku matematickej transformácie zákona sily z inerciálnej do uvažovanej neinerciálnej sústavy. Ak sústavu S' si zvolíme tak, že hmotný bod sa nachádza v rovine $X'Y'$ potom vektor $\boldsymbol{r}'$ určuje polohu hmotného bodu vzhľadom k počiatku $O \equiv O'$. Sila $\boldsymbol{F}_0$ sa nazýva *zotrvačná odstredivá sila*.

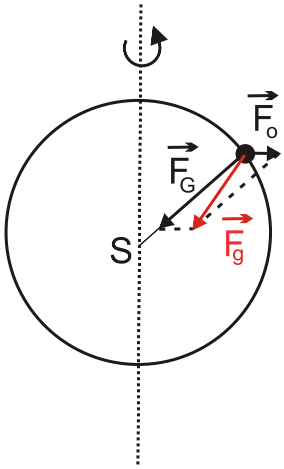
Prikladom neinerciálnych sústav tohto druhu môže byť sústava pevne spojená so Zemou. Na teleso o hmotnosti m, ktoré sa na zemskom povrchu nachádza v pokoji pôsobí gravitačná sila

$$F_G = G\frac{mM}{R^2}, \tag{1.114}$$

v ktorej G je gravitačná konštanta[6], M je hmotnosť Zeme a R je polomer Zeme. Z hľadiska sústavy spojenej so Zemou pôsobí okrem gravitačnej sily, ktorá smeruje do stredu Zeme, aj zotrvačná odstredivá sila $\boldsymbol{F}_0$, ktorá je omnoho menšia

[6] $G = 6,670.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$

ako gravitačná sila a je orientovaná v smere od osi rotácie Zeme (obr. 1.25). Výslednica týchto dvoch síl má veľkosť, ktorá je nepatrne odlišna od veľkosti gravitačnej sily a je mierne odchýlená od smeru gravitačnej sily.Výslednica gravitačnej a zotrvačnej sily sa nazýva tiažová sila $\boldsymbol{F}_g$ a smerom tejto sily je určený smer zvislý.



Obrázok 1.25 Neinerciálna sústava S´ rotujúca spolu so Zemou okolo osi Z´totožnej so zemskou osou. Z hľadiska neinerciálnej sústavy S´pôsobí na teleso, ktoré je na Zemskom povrchu v pokoji, okrem gravitačnej sily $\boldsymbol{F}_G$ aj zotrvačná odstredivá sila $\boldsymbol{F}_o$

1.2.6 Hodnotenie pôsobenia sily a jej účinku

Už je nám známe, že teleso vplyvom pôsobiacej sily mení svoj pohybový stav. Sila spôsobuje zmenu rýchlosti telesa pri translačnom pohybe a je aj príčinou jeho otáčavého pohybu. Silové pôsobenie budeme hodnotiť z hľadiska dráhy, na ktorej sila pôsobí a z hľadiska doby, počas ktorej sila pôsobí. Pre hodnotenie dráhového a časového účinku sily zavedieme fyzikálne veličiny, ktoré sa nazývajú *práca* a *impulz sily*.

Mechanická práca

Pôsobenie sily po určitej dráhe hodnotíme pomocou fyzikálnej veličiny, ktorá sa nazýva *mechanická práca* (ďalej len *práca*) a hovoríme, že sila pôsobiaca na teleso koná prácu. Pomocou práce teda hodnotíme *mechanický proces*, ktorý sa uskutočňuje pri interakcii telesa s okolitými objektami a súčasne je sprevádzaný pohybom pôsobiska sily.

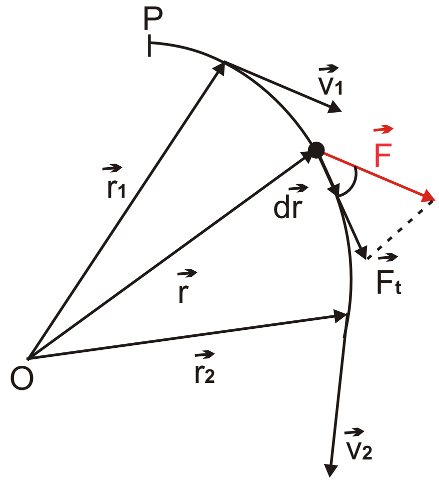
Práca, ktorú vykoná sila $\boldsymbol{F}$ pôsobiaca na hmotný bod po dráhe medzi bodmi určenými polohovými vektormi $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ (obr), je definovaná pomocou dráhového integrálu sily

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{1.115}$$

Z definície (1.115) je vidieť, že práca je skalárna veličina, ktorú môžeme vyjadriť aj v tvare

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = \int_{s_1}^{s_2} F_t\mathrm{d}s\,, \tag{1.116}$$

kde s_1, resp. s_2 sú dráhy, ktoré hmotný bod prešiel od zvoleného bodu P po miesto určené polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$, resp. $\boldsymbol{r}_2$, α je uhol, ktorý zviera vektor sily $\boldsymbol{F}$ so smerom posunutia d$\boldsymbol{r}$. Pomocou symbolu F_t sme označili veľkosť priemetu sily do smeru pohybu pôsobiska sily v danom mieste trajektórie (obr. 1.26). Zo vzťahu (1.116) vyplýva, že *práca je určená dráhovým integrálom priemetu sily do smeru pohybu pôsobiska sily*.



Obrázok 1.26 Pohyb hmotného bodu vplyvom sily $\boldsymbol{F}$. Práca je určená dráhovým integrálom priemetu sily do smeru pohybu pôsobiska sily.

Je zrejmé, že keď smer sily je totožný so smerom pohybu pôsobiska sily, výraz pre prácu nadobudne tvar

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \mathrm{d}s \,. \tag{1.117}$$

Ak na uvažovanej dráhe sila nemení svoju veľkosť a ani orientáciu vzhľadom k smeru pohybu, potom zo vzťahu (1.116) vyplýva, že

$$W = Fs \cos \alpha \,. \tag{1.118}$$

Jednotkou práce je 1 joule (J) a platí $1J = 1Nm$.

Práca pri otáčavom pohybe hmotného bodu po kružnici

Predpokladajme, že hmotný bod sa otáča po kružnici polomeru r vplyvom sily $\boldsymbol{F}$. Kvôli jednoduchosti nech vektor sily leží v rovine, v ktorej sa otáča pôsobisko sily, t. j. v rovine určenej uvažovanou kružnicou (obr.). Vypočítame prácu, ktorú vykoná pôsobiaca sila pri pootočení hmotného bodu o uhol $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Hmotný bod sa za dobu dt pootočí o elementárny uhol dφ, prejde elementárnu dráhu ds a jeho posunutie je d$\boldsymbol{r}$. Podľa rov. (1.115) môžeme pre elementárnu prácu písať vzťahy

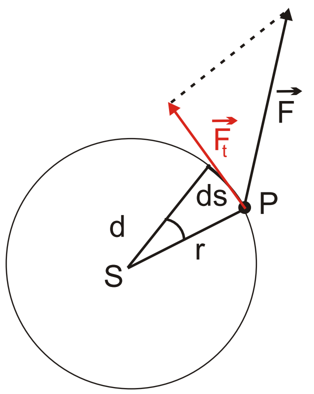
$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_t \mathrm{d}s = F_t r \mathrm{d}\varphi \,, \tag{1.119}$$

v ktorých F_t je veľkosť priemetu sily $\boldsymbol{F}$ do dotyčnice ku kružnici. Polomer kružnice r je súčasne ramenom sily $\boldsymbol{F}_t$ vzhľadom ku stredu kružnice. Súčin $F_t r$ predstavuje veľkosť momentu sily M, preto elementárna práca

$$\mathrm{d}W = M \mathrm{d}\varphi \,, \tag{1.120}$$

z ktorej po integrácii dostaneme prácu pri pootočení telesa o uhol $\Delta\varphi$

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \mathrm{d}\varphi \,. \tag{1.121}$$



Obrázok 1.27 Sila konajúca prácu pri otáčavom pohybe hmotného bodu okolo pevnej osi.

Z predchádzajúceho rozboru vyplýva, že práca sa vypočíta podľa vzťahu (1.121) aj v prípade otáčavého pohybu telesa okolo pevnej osi, ak sila $\boldsymbol{F}$ pôsobí v nejakom bode P na telese, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti r od osi.

Výkon

Z fyzikálneho a aj technického hľadiska je dôležitý čas, za ktorý sa práca vykonala. Pre hodnotenie rýchlosti konania práce zavedieme fyzikálnu veličinu

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.122}$$

ktorú budeme nazývať *okamžitý výkon* (ďalej len *výkon*). Teda výkon je rovný prvej derivácii práce podľa času. Podľa vzťahu (1.115) elementárna práca $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, preto výkon

$$P = \frac{\boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}\,, \tag{1.123}$$

pričom $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ je rýchlosť pôsobiska sily. V špeciálnom prípade, keď za rovnaké časové intervaly sa vykoná stále rovnako veľká práca, to znamená, že výkon je konštantný, môžeme výkon vyjadriť pomocou vzťahu

$$P = \frac{W}{t}\,. \tag{1.124}$$

Ak výkon nie je konštantný a W predstavuje prácu vykonanú za dobu t, potom podľa vzťahu (1.124) sa vypočíta *priemerný výkon*.

V prípade, keď sa pôsobisko sily pohybuje po kružnici, môžeme na základe vzťahov (1.120) a (1.122) písať

$$P = \frac{M\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\omega\,. \tag{1.125}$$

Teda v nami uvažovanom prípade výkon je vyjadrený súčinom momentu sily a uhlovej rýchlosti pôsobiska sily.

Jednotkou výkonu je 1 watt (W), pre ktorý platí $1W = 1Js^{-1}$. Zo vzťahu (1.124) vyplýva že jednotka práce $1J = 1Ws$. V praxi sa často výkon vyjadruje v kilowattoch (kW) a čas v hodinách (h). Po zavedení týchto jednotiek je možné prácu vyjadriť v kilowatthodinách (kWh).

Kinetická energia hmotného bodu

Zo zákona sily (1.58) vyplýva, že vplyvom sily pôsobiacej na hmotný bod sa mení jeho pohybový stav, ktorý sme charakterizovali pomocou hybnosti $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Nech

$\boldsymbol{v}_1$ je rýchlosť hmotného bodu v mieste, ktoré je určené polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ je jeho rýchlosť v bode určenom polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_2$ (obr.). Vzťah pre prácu (rov. (1.116)), ktorú vykoná sila $\boldsymbol{F}$ na dráhe medzi uvedenými bodmi môžeme upraviť pomocou veľkosti tangenciálnej sily $\boldsymbol{F}_t$ (rov. (1.63)) nasledovným spôsobom:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_t \mathrm{d}s = \int_{s_1}^{s_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\,. \tag{1.126}$$

Pomocou vzťahu

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.127}$$

definujeme *kinetickú energiu* hmotného bodu, ktorého hmotnosť je m a jeho rýchlosť je v. Zavedením kinetickej energie rovnicu 1.126 môžeme vyjadriť v tvare

$$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k\,, \tag{1.128}$$

ktorá hovorí, že *práca sily pôsobiacej na hmotný bod na určitej dráhe je rovná zmene kinetickej energie hmotného bodu na tejto dráhe*. Teda na dosiahnutie zmeny kinetickej energie hmotného bodu je potrebné vykonať prácu, ktorá v prípade zvýšenia kinetickej energie je kladná a v prípade jej zníženia je záporná. Rovnicu (1.128) budeme nazývať *vetou o kinetickej energii*.

Potenciálna energia hmotného bodu

Často sa stretávame s prípadmi, keď prácu je potrebné konať pri zmene polohy hmotného bodu nachádzajúceho sa v nejakom silovom poli a to aj vtedy, keď nenastáva zmena jeho pohybového stavu. Môžeme to ilustrovať na viacerých jednoduchých príkladoch. Silou treba pôsobiť po určitej dráhe a tým vykonať prácu, keď na zemskom povrchu chceme dvíhnuť teleso do určitej výšky, keď chceme zmeniť polohu telesa zaveseného na pružine a pod. Prácu treba vykonať aj vtedy, keď chceme od tyčového magnetu odtiahnuť kovový predmet, alebo, keď na vodič nabitý záporným nábojom chceme umiestniť ďalší záporný náboj. V uvedených prípadoch vonkajšia sila[7] prekonáva tiažovú silu, silu pružnosti, magnetickú silu alebo elektrickú silu. Vonkajšia sila, ktorú teraz označíme $\boldsymbol{F}'$, koná prácu, ktorú môžeme vyjadriť pomocou rovnice

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}'.\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{1.129}$$

Uvažujme o prípade, keď pri dvíhaní telesa je potrebné prekonávať okrem zemskej príťažlivej sily aj odpor vzduchu. Za takýchto okolností práca, ktorú vykoná vonkajšia sila pri premiestňovaní telesa po tej istej dráhe je väčšia než práca, ktorá by bola vykonaná bez prekonávania odporovej sily. Ďalší podstatný rozdiel spočíva v tom,

[7] Vo všeobecnosti na teleso nachádzajúce sa v silovom poli môžu okrem silového poľa pôsobiť aj iné objekty. Sily, ktorými uvážované objekty pôsobia budeme nazývať vonkajšími silami.

že práca pri premiestňovaní telesa medzi dvoma bodmi závisí aj od dráhy, po ktorej teleso je prenášané a čím je väčšia dráha pohybu, tým väčšia je aj práca vykonaná vonkajšou silou. Nastala by iná situácia, ak by sme odpor prostredia nebrali do úvahy. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že v takom prípade práca vykonaná vonkajšími silami nezávisí od veľkosti dráhy, ale len od polohy počiatočného a konečného bodu.

Vo všeobecnosti silové polia, v ktorých práca nezávisí na tvare trajektórie hmotného bodu, ale len na polohe počiatočného a konečného bodu dráhy, sa nazývajú *konzervatívne (potenciálové)* silové polia. Pri premiestňovaní hmotného bodu v konzervatívnom silovom poli koná vonkajšia sila $\boldsymbol{F}^{'}$ prácu pri prekonávaní sily $\boldsymbol{F}$, ktorou na hmotný bod pôsobí konzervatívne silové pole. Ak pri zmene polohy nenastáva zmena pohybového stavu, vonkajšia sila $\boldsymbol{F}^{'}$ je v neustálej rovnováhe so silou $\boldsymbol{F}$, ktorou na hmotný bod pôsobí pole, teda $\boldsymbol{F}^{'} = -\boldsymbol{F}$.

Pomocou práce vykonanej pri premiestnení hmotného bodu v konzervatívnom silovom poli definujeme zmenu *potenciálnej (polohovej)* energie hmotného bodu v uvažovanom silovom poli. Nech E_{p1} je potenciálna energia hmotného bodu v mieste 1 a E_{p2} je jeho energia v mieste 2. *Zmenu potenciálnej energie $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$ definujeme pomocou práce, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri premiestnení hmotného bodu z polohy 1 do polohy 2.* So zreteľom na vzťah pre prácu (1.129) a zohľadnením vzťahu $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$ medzi vonkajšou silou $\boldsymbol{F}'$ a silou, ktorou na hmotný bod pôsobí pole $\boldsymbol{F}$, môžeme zmenu potenciálnej energie definovať aj vzťahom

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{1.130}$$

Vektory $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$ v rov. (1.130) určujú polohu bodov 1 a 2 a $\boldsymbol{F}$ je sila, ktorou na hmotný bod pôsobí konzervatívne silové pole.

Závislosť sily od potenciálnej energie hmotného bodu

Pomocou vzťahu pre elementárnu zmenu potenciálnej energie

$$\mathrm{d}E_p = -\boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.131}$$

vyplývajúceho z rovnice (1.130) môžeme odvodiť závislosť sily od potenciálnej energie v danom mieste silového poľa. Potenciálna energia hmotného bodu E_p závisí od jeho polohy v konzervatívnom silovom polí, ktorá môže byť určená pomocou súradníc x, y a z. Pre diferenciál $\mathrm{d}E_p$ funkcie $E_p(x, y, z)$ platí:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_p &= \frac{\partial E_p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) E_p \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.
\end{aligned} \tag{1.132}$$

Výraz na pravej strane poslednej rovnice, ktorý označíme pomocou symbolu ∇ (nabla), t. j.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \right), \tag{1.133}$$

predstavuje diferenciálny operátor a výsledkom jeho pôsobenia na skalárnu veličinu je vektor. Operáciu operátora ∇, ktorý sa nazýva aj Hamiltonov operátor, na skalárnu veličinu nazývame *gradient*. Pomocou tohto označenia môžeme rovnicu (1.132) vyjadriť v tvare

$$\mathrm{d}E_p = \nabla E_p \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = gradE_p \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{1.134}$$

Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k})$ vyjadruje elementárne posunutie hmotného bodu. Porovnaním vzťahov (1.131) a (1.134) dostávame rovnicu

$$\boldsymbol{F} = -gradE_p\,, \tag{1.135}$$

ktorá hovorí, že *sila, ktorou konzervatívne silové pole pôsobí v danom mieste na hmotný bod, je rovná záporne vzatému gradientu jeho potenciálnej energie v uvažovanom mieste*.

Zákon zachovania mechanickej energie

Uvažujme o *dynamicky izolovanom systéme*, o ktorom predpokladáme, že na hmotný bod okrem sily konzervatívneho poľa nepôsobí žiadna iná sila. Vplyvom silového poľa sa môže zmeniť poloha hmotného bodu a aj jeho pohybový stav, tak ako je to napr. pri voľnom páde telesa v poli zemskej tiaže.

Práca, ktorú *pole* vykoná pri premiestnení hmotného bodu z polohy 1 do polohy 2, je rovná rozdielu kinetickej energie v týchto bodoch (rovnica (1.128)), preto môžeme pre písať

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r} = E_{k2} - E_{k1}\,. \tag{1.136}$$

Podľa rov. (1.130) zmena potenciálnej energie pri diskutovanom premiestnení hmotného bodu taktiež súvisí s prácou vykonanou silovým poľom. Porovnaním vzťahov (1.130) a (1.136) dostaneme rovnicu

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}\,, \tag{1.137}$$

ktorá hovorí, že súčet kinetickej a potenciálnej energie v bode 1 konzervatívneho silového poľa je rovnaký ako tento súčet v bode 2. Keďže body 1 a 2 môžu byť ľubovoľné, súčet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu, ktorý budeme nazývať *mechanickou energiou E* hmotného bodu, je v každom mieste konzervatívneho silového poľa rovnaký. Na základe uvedeného môžeme rovnicu (1.137) zapísať vo všeobecnejšom tvare

$$E = E_k + E_p = \text{konšt.} \tag{1.138}$$

Táto rovnica je matematickým vyjadrením *zákona zachovania mechanickej energie*, podľa ktorého *súčet kinetickej a potenciálnej energie (mechanická energia) hmotného bodu je rovnaký v každom mieste konzervatívneho silového poľa*.

V prírode a v technickej praxi sa stretávame s nekonzervatívnymi silami, ktoré sa nazývajú *disipatívne* sily. Práca vykonaná nekonzervatívnymi silami závisí od tvaru trajektórie (od veľkosti dráhy medzi uvažovanými bodmi), po ktorej sa pôsobisko sily pohybuje. Je zrejmé, že práca nekonzervatívnych síl po uzavretej trajektórii je na rozdiel od práce konzervatívnych síl rôzna od nuly. Príkladom takej sily je sila trenia a aj pohyb telesa v poli zemskej tiaže, pri ktorom je potrebné zohľadniť odpor vzduchu je pohyb v disipatívnom silovom poli.

Zákon zachovania mechanickej energie je špeciálnym prípadom *zákona zachovania energie*, ktorý sa vzťahuje na všetky druhy energie. V prípade disipatívnych síl akými sú napr. trecie sily, časť mechanickej energie sa mení na tepelnú energiu, avšak celková energia sa zachováva.

Impulz sily

Časový účinok sily pôsobiacej na hmotný bod za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ budeme hodnotiť pomocou časového integrálu sily

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \mathrm{d}t\,. \tag{1.139}$$

Takto definovaná vektorová veličina $\boldsymbol{I}$ sa nazýva *impulz sily*. Substitúciou sily pomocou pohybového zákona

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \mathrm{d}t = \int_{\boldsymbol{p}_1}^{\boldsymbol{p}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1\,, \tag{1.140}$$

kde $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$ sú hybnosti hmotného bodu v okamihoch t_1 a t_2. Teda

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \Delta \boldsymbol{p}\,. \tag{1.141}$$

Z odvodenej rovnice vyplýva, že *impulz sily pôsobiacej na hmotný bod počas časového intervalu Δt sa rovná zmene hybnosti hmotného bodu za túto dobu*.

Impulz sily je vhodný pre hodnotenie nárazových síl, t. j. síl, ktoré pôsobia krátku dobu a sú veľmi veľké. Počas ich pôsobenia sa len málo mení poloha telesa, avšak dochádza k veľkej zmene jeho pohybového stavu.

V mnohých prípadoch nárazová sila má premenlivú veľkosť, ale jej smer sa nemení. Namiesto takej sily často stačí uvažovať strednú hodnotu nárazovej sily $\bar{F}$, ktorá spôsobuje rovnaký impulz ako premenlivá sila. V uvedených prípadoch môžeme písať skalárnu rovnicu

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F \mathrm{d}t = \bar{F}(t_2 - t_1) = \Delta p\,, \tag{1.142}$$

z ktorej napr. vyplýva, že rovnakú zmenu hybnosti telesa Δp môžeme dosiahnuť pôsobením veľkej sily $\bar{F}$ počas krátkej doby $\Delta t = t_2 - t_1$, alebo naopak, pôsobením malej sily počas dlhšej doby.

Rotačný impulz

Podobne ako v prípade impulzu sily, ktorý sme definovali pre charakterizovanie časového účinku sily, pomocou *impulzu momentu sily (rotačného impulzu)* $\boldsymbol{H}$, ktorý je definovaný vzťahom

$$\boldsymbol{H} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M} \mathrm{d}t\,, \tag{1.143}$$

charakterizujeme časový účinok momentu sily. Pomocou rovnice (1.143) a pohybovej rovnice pre otáčavý pohyb hmotného bodu (1.98) dostaneme súvis medzi rotačným impulzom a momentom hybnosti hmotného bodu:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 = \Delta \boldsymbol{L}\,. \tag{1.144}$$

Z rovnice vyplýva, že *rotačný impulz pôsobiaci na hmotný bod v časovom intervale* $\Delta t = t_2 - t_1$ *je rovný zmene momentu hybnosti* $\Delta \boldsymbol{L}$ *hmotného bodu za túto dobu*.

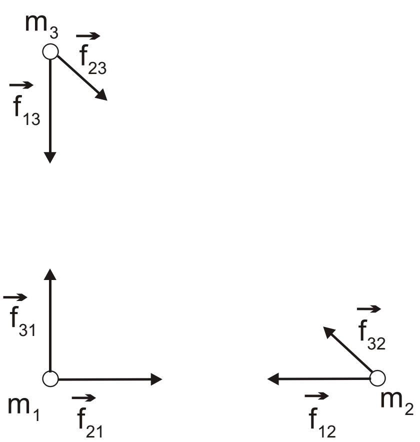
1.3 Mechanický pohyb sústavy hmotných bodov

Doteraz používaný prístup, v ktorom skutočný objekt bol nahradený hmotným bodom, neumožňuje riešiť všetky úlohy dynamiky. Pre prípady, keď rozmery objektov nemôžu byť zanedbané je užitočné zaviesť model *sústavy hmotných bodov*. Pomocou takého modelu je možné napr. skúmať pohyb sústavy telies, v ktorej každé teleso je nahradené hmotným bodom. Predstava sústavy hmotných bodov je vhodná aj pre tuhé telesá a látky v kvapalnom a plynnom stave, v ktorých stavebné častice (atómy, molekuly), môžu byť považované za hmotné body.

Uvažujme o sústave n hmotných bodov, ktorých hmotnosti sú m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ... m_n. Každý hmotný bod je vo vzájomnom silovom pôsobení s ostatnými hmotnými bodmi. Sily, ktorými hmotné body navzájom na seba pôsobia sa nazývajú *vnútorné sily*. Okrem toho, na každý hmotný bod sústavy môžu pôsobiť objekty, ktoré nepatria do uvažovanej sústavy hmotných bodov. Sily, ktorými pôsobia objekty nepatriace do uvažovanej sústavy sú *vonkajšími silami*.

Výslednica vnútorných síl

Pri výpočte výslednice všetkých vnútorných síl sústavy využijeme zákon akcie a reakcie. Kvôli jednoduchosti najprv uvažujme o sústave pozostavajúcej z troch hmotných bodov, ktorých hmotnosti sú m_1, m_2 a m_3 (obr. (1.28)).



Obrázok 1.28 Vnútorné sily medzi hmotnými bodmi sústavy troch hmotných bodov.

Ak hmotný bod m_1 pôsobí na hmotný bod m_2 silou $\boldsymbol{f}_{12}$, potom hmotný bod m_2 pôsobí na m_1 silou $\boldsymbol{f}_{21}$, pre ktorú platí $\boldsymbol{f}_{21} = -\boldsymbol{f}_{12}$. Analogicky môžeme vyjadriť vzťahy medzi silami, ktorými na seba pôsobia ďalšie dve dvojice hmotných bodov, t. j. $\boldsymbol{f}_{31} = -\boldsymbol{f}_{13}$ a $\boldsymbol{f}_{32} = -\boldsymbol{f}_{23}$. Je zrejmé, že výslednica vnútorných síl medzi troma hmotnými bodmi

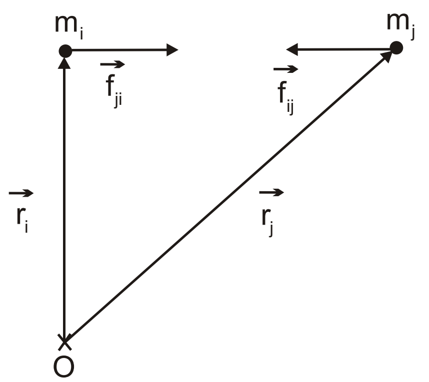
$$(\boldsymbol{f}_{21} + \boldsymbol{f}_{12}) + (\boldsymbol{f}_{31} + \boldsymbol{f}_{13}) + \\ + (\boldsymbol{f}_{23} + \boldsymbol{f}_{32}) = 0\,. \tag{1.145}$$

V každej sústave hmotných bodov je možné vnútorné sily, ktorými jednotlivé hmotné body na seba pôsobia, združiť do dvojíc $\boldsymbol{f}_{ij}$ a $\boldsymbol{f}_{ji}$. Tieto sily majú rovnakú veľkosť a sú opačne orientované, preto pre n hmotných bodov platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_{ji} = 0\,, \tag{1.146}$$

kde $\boldsymbol{f}_{ji}$ je sila, ktorou pôsobí hmotný bod m_j na hmotný bod m_i. Odvodená rovnica hovorí, že *výslednica všetkých vnútorných síl je rovná nule*.

Výslednica momentov vnútorných síl



Obrázok 1.29 Určenie polohy pôsobísk síl, ktorými na seba pôsobia hmotné body m_i a m_j.

V ďalšom vypočítame výsledný moment všetkých vnútorných síl. Rovnako ako v predchádzajúcom odstavci predpokladáme, že medzi dvoma ľubovoľnými hmotnými bodmi sústavy m_i a m_j pôsobia sily $\boldsymbol{f}_{ji}$ a $\boldsymbol{f}_{ij}$, ktoré sú rovnako veľké, majú opačný smer a ležia v tej istej priamke (obr. (1.29)). Poloha týchto hmotných bodov je vzhľadom k zvolenému vzťažnému bodu O určená pomocou polohových vektorov $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{r}_j$ a výsledný moment týchto dvoch síl vzhľadom k bodu O je rovný vektorovému súčtu momentov jednotlivých síl. Teda

$$\boldsymbol{M}_{ji} + \boldsymbol{M}_{ij} = (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ji}) + (\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{f}_{ij}) = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{f}_{ji}\,. \tag{1.147}$$

Vektor $\Delta\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ leží na tej istej priamke ako aj vektor $\boldsymbol{f}_{ji}$, preto

$$\boldsymbol{M}_{ji} + \boldsymbol{M}_{ij} = \Delta\boldsymbol{r}_{ij} \times \boldsymbol{f}_{ji} = 0\,. \tag{1.148}$$

Zovšeobecnením týchto úvah pre všetky dvojice síl sústavy n hmotných bodov dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{M}_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ji} = 0\,. \tag{1.149}$$

Teda *výsledný moment všetkých vnútorných síl sústavy vzhľadom k ľubovoľnému vzťažnému bodu sústavy je rovný nule*.

Ťažisko sústavy hmotných bodov

V mnohých prípadoch namiesto pohybu celej sústavy hmotných bodov postačuje skúmať pohyb ťažiska sústavy hmotných bodov. Existuje viacero spôsobov definície ťažiska a odvodenia vzťahov pre určenie jeho polohy. Predpokladáme, že pojem ťažiska je pre čitateľa dobre známy, preto sa obmedzíme na vyjadrenie vzťahov pre určenie jeho polohy bez príslušného odvodenia.

Ak poloha hmotných bodov o hmotnostiach m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ... m_n je vzhľadom ku vzťažnému bodu O určená pomocou polohových vektorov $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, ..., $\boldsymbol{r}_i$, ... $\boldsymbol{r}_n$, potom polohu ťažiska je možné určiť pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$, pre ktorý platí:

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M}\sum_{i=i}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \,, \tag{1.150}$$

kde $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ predstavuje hmotnosť celej sústavy hmotných bodov.

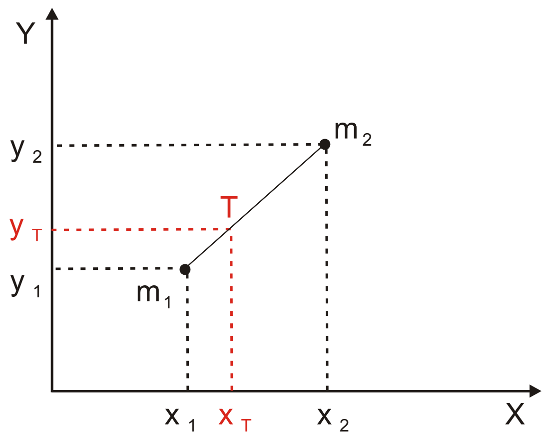
Ak vzťažný bod O je počiatkom pravouhlej súradnicovej sústavy a vektory $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{r}_i$ rozložíme na zložky x_{T}, y_{T}, z_{T} a x_i, y_i, z_i, potom súradnice ťažiska sústavy hmotných bodov môžu byť vyjadrené pomocou vzťahov

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \,, \tag{1.151a}$$

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \,, \tag{1.151b}$$

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \,, \tag{1.151c}$$

Na obr. (1.30) je znázornená poloha ťažiska sústavy dvoch hmotných bodov, ktorých pomer hmotností $\frac{m_1}{m_2} = 2$.



Obrázok 1.30 Poloha ťažiska sústavy dvoch hmotných bodov, ktorých pomer hmotností $\frac{m_1}{m_2} = 2$.

Vzťahy (1.150) až (1.151), ktoré sú platné pre ľubovoľnú sústavu hmotných bodov, platia aj pre látkové objekty v tuhom, kvapalnom a plynnom stave, v ktorých stavebné častice (atómy, molekuly, ióny) sú blízko pri sebe. Kvôli obrovskému počtu častíc v látke a ich veľkej hustote je vyhodnejšie pri popise mechanického pohybu nahradiť diskrétnu sústavu hmotných bodov, napr. sústavu molekúl, objektom so spojite distribuovanou látkou. Taký prístup často budeme využívať pri skúmaní pohybu telies.

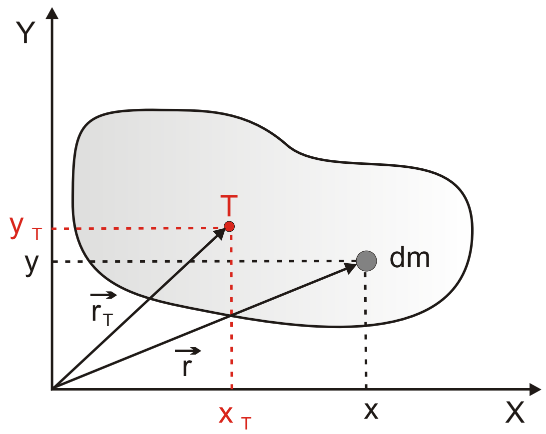
V uvedených prípadoch budeme namiesto hmotného bodu s hmotnosťou m uvažovať o nekonečne malom hmotnom elemente o hmotnosti $\mathrm{d}m$, ktorý sa nachádza v nekonečne malom objeme $\mathrm{d}V$. Hustota látky je definovaná vzťahom

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \,, \tag{1.152}$$

z ktorého pre hmotnosť hmotného elementu vyplýva vzťah $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$. Hmotnosť látky sa vypočíta podľa vzťahu

$$M = \int \rho \mathrm{d}V \,, \tag{1.153}$$

avšak v prípade homogénnych látok, t. j. v prípadoch, keď hustota látky je v každej jej časti rovnaká, hmotnosť látky môžeme vypočítať podľa vzťahu $M = \rho V$.



Obrázok 1.31 Určenie polohy ťažiska telesa.

Polohu ťažiska vzhľadom k vzťažnému bodu O vyjadruje polohový vektor

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{T} = \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m\,. \tag{1.154}$$

Ak vzťažný bod spájame s počiatkom pravouhlej súradnicovej sústavy, potom pre súradnice ťažiska platia vzťahy

$$x_\mathrm{T} = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m\,, \tag{1.155a}$$
$$y_\mathrm{T} = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m\,, \tag{1.155b}$$
$$z_\mathrm{T} = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m\,, \tag{1.155c}$$

v ktorých x, y, z sú súradnice hmotného elementu $\mathrm{d}m$, M je hmotnosť látkového objektu, ktorá môže byť vypočítaná podľa vzťahu (1.153). Na obr. (1.31) je znázornená poloha hmotného elementu $\mathrm{d}m$ a ťažiska T telesa tvaru nepravidelnej dosky.

1.3.1 Pohybové rovnice sústavy hmotných bodov

Prvá impulzová veta

Na každý hmotný bod sústavy hmotných bodov môžu vo všeobecnosti pôsobiť vonkajšie a vnútorné sily. Výslednicu všetkých vonkajších síl pôsobiacich na i-ty hmotný bod označíme $\boldsymbol{F}_i$ a výslednica všetkých vnútorných síl, ktorými na uvažovaný i-ty hmotný bod pôsobia všetky ostatné hmotné body sústavy je $\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_{ji}$. Keďže zatiaľ hovoríme o jednom i-tom hmotnom bode sústavy, môžeme na neho aplikovať zákon sily (1.58), podľa ktorého výslednica vonkajších a vnútorných síl pôsobiacich na hmotný bod je rovná časovej zmene hybnosti hmotného bodu. Teda môžeme písať rovnicu

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.156}$$

v ktorej $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ je hybnosť i-teho hmotného bodu. Sumáciou rovníc (1.156) pre $i = 1$ až n dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i\,. \tag{1.157}$$

$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$ v rovnici (1.157) je výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov, t. j. na všetky body sústavy. Dvojitá suma predstavuje výslednicu všetkých vnútorných síl a táto podľa rovnice (1.146) je rovná nule. $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}$ predstavuje hybnosť sústavy hmotných bodov. Po uvedených substitúciách dostaneme rovnicu

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.158}$$

ktorá hovorí, že *výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovná časovej zmene hybnosti sústavy hmotných bodov*. Rovnica (1.158) sa nazýva *1. impulzová veta*.

Pre 1. impulzovú vetu je môžné nájsť aj iné matematické vyjadrenie. Hybnosť sústavy hmotných bodov je možné pomocou vzťahu (1.150) vyjadriť nasledovným spôsobom:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}})\,. \tag{1.159}$$

Dosadením vzťahu $\boldsymbol{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}})$ do 1. impulzovej vety (1.158) dostaneme rovnicu

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}\,, \tag{1.160}$$

v ktorej M je hmotnosť sústavy hmotných bodov a $\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t^2}$ je zrýchlenie ťažiska sústavy hmotných bodov. Rovnica (1.160), ktorá je z fyzikálneho hľadiska ekvivalentná 1. vete impulzovej, je *vetou o pohybe ťažiska*. Podľa nej *ťažisko sústavy hmotných bodov sa pohybuje tak, ako by sa pohyboval hmotný bod, ktorého hmotnosť je rovná hmotnosti sústavy, keby naň pôsobila sila rovnajúca sa výslednici všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov.*

Druhá impulzová veta

Ak na hmotný bod sústavy, ktorého hmotnosť je m_i a hybnosť $\boldsymbol{p}_i$, pôsobí vonkajšia sila $\boldsymbol{F}_i$ a vnútorná sila $\boldsymbol{f}_i$, potom moment týchto síl vzhľadom k ľubovoľnému vzťažnému bodu O je

$$(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) + \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ji})\,, \tag{1.161}$$

kde vektor $\boldsymbol{r}_i$ určuje polohu i-teho hmotného bodu sústavy vzhľadom k vzťažnému bodu O. Uvažovaný i-ty hmotný bod vzhľadom na vzťažný bod O má moment hybnosti $\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$, ktorého súvis s momentom sily je daný pohybovou rovnicou (1.98). Teda môžeme písať

$$(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) + \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ji}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.162}$$

Sumáciou rovníc (1.162) pre $i = 1, 2, 3, ..., n$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i\,. \tag{1.163}$$

V predchádzajúcej rovnici vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i)$ predstavuje výslednicu momentov všetkých vonkajších síl $\boldsymbol{M}$ a vektorový súčet momentov hybností jednotlivých hmotných bodov $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i$ predstavuje celkový moment hybnosti sústavy $\boldsymbol{L}$. Z predchádzajúcich úvah už vieme, že dvojitá suma $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{ji})$ predstavuje vektorový súčet momentov všetkých vnútorných síl, ktorý je rovný nule (rov. (1.149)). Po uvedených označeniach dostaneme rovnicu

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.164}$$

ktorá sa nazýva 2. *impulzová veta*. Z nej vyplýva, že *vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovný časovej zmene momentu hybnosti sústavy hmotných bodov*.

1.3.2 Zákony zachovania a podmienky rovnováhy

Sústavu hmotných bodov, na ktorú nepôsobia nijaké vonkajšie sily budeme nazývať *dynamicky izolovanou sústavou*. V prípade izolovanej sústavy výslednica vonkajších síl $\boldsymbol{F} = 0$ a aj výsledný moment vonkajších síl $\boldsymbol{M} = 0$. Z prvej (1.158) a druhej (1.164) impulzovej vety pre izolovanú sústavu hmotných bodov vyplývajú vzťahy

$$\boldsymbol{p} = \text{konšt.} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{L} = \text{konšt.} \tag{1.165}$$

Rovnice (1.165) sú matematickými vyjadreniami *zákona zachovania hybnosti* a *zákona zachovania momentu hybnosti*. Z uvedených rovníc vyplýva, že *hybnosť izolovanej sústavy a jej moment hybnosti sa vzhľadom k ľubovoľnému vzťažnému bodu O zachovávajú, t. j. nemenia svoje veľkosti ani smery*.

Uviedli sme, že prvá veta impulzová je ekvivalentná s vetou o pohybe ťažiska. V prípade dynamicky izolovanej sústavy hmotných bodov rovnica (1.160) nadobúdne tvar

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} = 0\,, \tag{1.166}$$

z ktorej vyplýva, že zrýchlenie ťažiska sústavy hmotných bodov $\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = 0$ a rýchlosť ťažiska sústavy

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} = \text{konšt.} \tag{1.167}$$

Z odvodenej rovnice vyplýva, že ťažisko izolovanej sústavy sa pohybuje konštantnou rýchlosťou a to bez ohľadu na to, ako sa pohybujú jednotlivé hmotné body sústavy.

V špeciálnom prípade rovnice (1.165) platia aj pre sústavu hmotných bodov, ktorá nie je dynamicky izolovaná. Taký prípad nastáva, keď vonkajšie sily pôsobiace na jednotlivé hmotné body sústavy sú rôzne od nuly, avšak výslednica všetkých vonkajších síl $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F} = 0$ a aj výslednica momentov vonkajších síl $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{M} = 0$. Hovoríme, že sily pôsobiace na sústavu hmotných bodov a aj ich momenty sú v rovnováhe. V diskutovanom prípade rovnice (1.165) sú *podmienkami rovnováhy sústavy hmotných bodov*.

1.4 Otáčavý pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi

Pomocou pohyvových rovníc (1.158) a (1.164) môžeme vyšetrovať pohyb ľubovoľnej sústavy hmotných bodov, teda aj pohyb telesa, ktoré môžeme považovať za objekt zo spojite distribuovanou látkou. Skúmanie pohybu telesa je jednoduchšie v prípadoch, keď sa každý bod telesa pohybuje po priamke alebo vykonáva otáčavý pohyb okolo pevnej osi. V obidvoch uvažovaných prípadoch všetky vektory popisujúce pohyb ležia v tej istej priamke, preto namiesto príslušných vektorových rovníc stačí pri skúmaní pohybu pracovať so skalárnymi rovnicami. V prvom nami uvažovanom prípade pohyb telesa môžeme skúmať pomocou rovnice $F = ma$. V ďalšom sa pokúsime odvodiť analogickú rovnicu pre otáčavý pohyb telesa okolo pevnej osi.

1.4.1 Pohybová rovnica telesa rotujúceho okolo pevnej osi

Pomocou druhej vety impulzovej (1.164), ktorá má tvar

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.168}$$

môžeme vyšetrovať ľubovoľný otáčavý pohyb. Moment sily spôsobujúci otáčavý pohyb telesa môžeme vo všeobecnosti vyjadriť pomocou zložiek v pravouhlej súradnicovej sústave podľa vzťahu

$$\boldsymbol{M} = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}\,. \tag{1.169}$$

Zmenu pohybového stavu telesa, ktoré rotuje okolo pevnej osi $o \equiv Z$ pravouhlej súradnicovej sústavy spôsobuje iba zložka momentu sily spadajúca do smeru osi rotácie a ostatné zložky momentu sily nemajú vplyv na otáčavý pohyb okolo pevnej osi. Z uvedených dôvodov naše úvahy nebudú strácať na všeobecnosti, keď budeme predpokladať, že moment sily má len jednu nenulovú zložku, ktorej veľkosť je M_z, teda $M = M_z$.

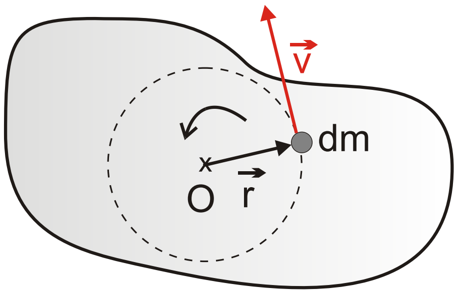
Moment hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi

Pri odvodzovaní pohybovej rovnice je potrebné vyjadriť aj zložku momentu hybnosti spadajúcu do osi rotácie $o \equiv Z$.

Pri otáčavom pohybe telesa sa rôzne jeho časti pohybujú rôznymi rýchlosťami, preto je potrebné najprv vyjadriť moment hybnosti hmotného elementu telesa $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$. Podľa definície (1.96) moment hybnosti elementu o hmotnosti $\mathrm{d}m$, ktorého poloha vzhľadom k zvolenému vzťažnému bodu O je určená pomocou polohového vektora $\boldsymbol{r}$ a rýchlosť elementu vzhľadom k tomuto bodu je $\boldsymbol{v}$, je určený vzťahom $\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}m$, z ktorého pre moment hybnosti rotujúceho telesa vyplýva

$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}m\,. \tag{1.170}$$

Kvôli jednoduchosti nech rotujúcim telesom je teleso tvaru nepravidelnej dosky zanedbateľnej hrúbky (obr. (1.32)) a nech os rotácie telesa o je kolmá na dosku.



Obrázok 1.32 Otáčavý pohyb telesa tvaru nepravidelnej dosky zanedbateľnej hrúbky okolo pevnej osi, ktorá prechádza bodom O a je kolmá na dosku. Vektor $\boldsymbol{r}$ určuje polohu hmotného elementu o hmotnosti dm, ktorý sa pohybuje po kružnici rýchlosťou $\boldsymbol{v}$. Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ je orientovaný pozdĺž osi rotácie.

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ budeme vzťahovať k vzťažnému bodu O, ktorý leží na osi rotácie v bode, v ktorom os pretína dosku. Vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$ ležia v rovine kolmej na os rotácie, preto vektor $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ a aj vektor momentu hybnosti telesa $\boldsymbol{L}$ leží v osi rotácie. Uvedené vektory sú na seba kolmé, preto pre veľkosť momentu hybnosti môžeme písať

$$L = \int rv\mathrm{d}m = \int \omega r^2 \mathrm{d}m = \omega \int r^2 \mathrm{d}m \,. \tag{1.171}$$

Pomocou integrálu

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \tag{1.172}$$

definujeme *moment zotrvačnosti* telesa I vzhľadom k osi, okolo ktorej teleso rotuje. Teda moment hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi sa vypočíta podľa vzťahu

$$L = I\omega \,. \tag{1.173}$$

Z výpočtov vyplýva, že *veľkosť momentu hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi je určená súčinom momentu zotrvačnosti telesa I vzhľadom k osi rotácie a uhlovej rýchlosti ω rotácie. Vektor momentu hybnosti **L** leží v osi rotácie a jeho orientácia je určená smerom rotácie.*

Pohybová rovnica telesa rotujúceho okolo pevnej osi

V prípade telesa rotujúceho okolo pevnej osi vektory momentu sily $\boldsymbol{M}$ a momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ ležia v tej istej priamke, preto namiesto druhej impulzovej vety vo vektorovom tvare môžeme otáčavý pohyb popísať skalárnou rovnicou

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t}, \tag{1.174}$$

v ktorej moment hybnosti L sme nahradili vzťahom (1.173). Moment zotrvačnosti I nie je závislý od času, preto pre moment sily dostaneme vzťah

$$M = I\varepsilon \,, \tag{1.175}$$

v ktorom $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ je uhlové zrýchlenie telesa rotujúceho okolo pevnej osi. Odvodená rovnica, ktorá je platná nielen pre teleso tvaru dosky zanedbateľnej hrúbky, ale platí pre teleso ľubovoľného tvaru, je *pohybovou rovnicou telesa rotujúceho okolo pevnej osi*. Pohybová rovnica hovorí, že *moment všetkých vonkajších síl otáčajúcich teleso okolo pevnej osi je rovný súčinu momentu zotrvačnosti vzhľadom k tejto osi a uhlového zrýchlenia telesa*.

Použitie pohybovej rovnice odvodenej pre otáčavý pohyb telesa rotujúceho okolo pevnej osi si ukážeme v časti 1.4.2 pri skúmaní kyvadlového pohybu telies.

Kinetická energia telesa rotujúceho okolo pevnej osi

Každý hmotný element telesa rotujúceho okolo pevnej osi sa otáča rovnakou uhlovou rýchlosťou ω, avšak jeho rýchlosť v závisí od polomeru kružnice r (obr. (1.32)), po ktorej sa daný element pohybuje. Keďže $v = \omega r$, pre kinetickú energiu hmotného elementu môžeme písať

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}mv^2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\omega^2 r^2. \tag{1.176}$$

Po integrácii dostaneme vzťah

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \mathrm{d}m\,, \tag{1.177}$$

v ktorom $I = \int r^2 \mathrm{d}m$ je moment zotrvačnosti vzhľadom k osi rotácie. Teda kinetická energia telesa rotujúceho okolo pevnej osi sa vypočíta podľa vzťahu

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{1.178}$$

Pohybovú rovnicu telesa rotujúceho okolo pevnej osi (1.175) môžeme napísať v tvare

$$M = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.179}$$

Vynásobením tejto rovnice elementárnym uhlom $\mathrm{d}\varphi = \omega\mathrm{d}t$ dostaneme vzťah

$$M\mathrm{d}\varphi = I\omega\mathrm{d}\omega\,. \tag{1.180}$$

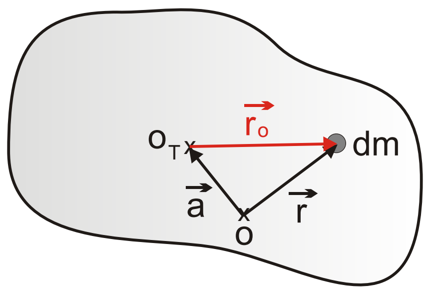
Podľa (1.120) ľavá strana predchádzajúcej rovnice vyjadruje elementárnu prácu $\mathrm{d}W$ vykonanú pri pootočení telesa o uhol $\mathrm{d}\varphi$. Práca vykonaná pri pootočení telesa o uhol $\varphi_2 - \varphi_1$ je

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2, \tag{1.181}$$

kde uhlové rýchlosti ω_1 a ω_2 odpovedajú počiatočnému uhlu φ_1 a φ_2 po pootočení. Z odvodenej rovnice vyplýva, že práca sily vykonaná pri otočení telesa o uhol $\varphi_2 - \varphi_1$ je rovná zmene kinetickej energie pri uvažovanom pootočení. Vo vete o kinetickej energii, ktorú sme už skôr dokázali pre prípad translačného pohybu telesa (rov.(1.128)) sa predpokladá, že moment zotrvačnosti telesa sa počas pohybu nemení.

Moment zotrvačnosti telesa, Steinerova veta

Z definície (1.172) sa dá dedukovať, že moment zotrvačnosti telesa závisí od hmotnosti telesa, od vzdialenosti osi od ťažiska a od jej orientácie vzhľadom k telesu.



Obrázok 1.33 Určenie polohy hmotného elementu dm vzhľadom k osi o_T, ktorá prechádza ťažiskom telesa tvaru nepravidelnej dosky a vzhľadom k osi o, ktorá je rovnobežná s ťažiskovou osou o_T. Obidve osi sú orientované kolmo na dosku. Vektor $\boldsymbol{a}$ určuje polohu osi o_T vzhľadom k osi o.

Odvodíme súvis medzi momentom zotrvačnosti telesa vzhľadom k ľubovoľnej osi o a momentom zotrvačnosti vzhľadom k osi o_{T}, ktorá prechádza ťažiskom telesa a s uvažovanou osou je rovnobežná. Kvôli jednoduchosti výpočty momentu zotrvačnosti urobíme pre teleso tvaru nepravidelnej dosky zanedbateľnej hrúbky vzhľadom k osi, ktorá je na dosku kolmá. Polohu hmotného elementu dm budeme určovať pomocou polohových vektorov $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}_0$ vzhľadom k osiam o a o_{T} tak, ako je to znázornené na obr. (1.33)

Poloha osi o_{T} vzhľadom k osi o je určená pomocou polohového vektora $\boldsymbol{a}$. Z obrázku je zrejmé, že pre uvedené vektory platí rovnica

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}\,, \tag{1.182}$$

umocnením ktorej dostaneme

$$r^2 = r_0^2 + a^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}_0\,. \tag{1.183}$$

Vynásobením tejto rovnice hmotnosťou dm a integráciou dostaneme

$$\int r^2 \mathrm{d}m = \int r_0^2 \mathrm{d}m + a^2 \int \mathrm{d}m + 2\boldsymbol{a} \cdot \int \boldsymbol{r}_0 \mathrm{d}m\,, \tag{1.184}$$

pričom pri úpravách na pravej strane rovnice sme zohľadnili skutočnosť, že vektor $\boldsymbol{a}$ a aj jeho veľkosť a sú konštantné. Zo vzťahu (1.172) vyplýva, že integrál na ľavej strane rovnice predstavuje moment zotrvačnosti I vzhľadom k osi o, prvý integrál na pravej strane predstavuje moment zotrvačnosti I_0 vzhľadom k osi o_{T} a druhý vzťah na pravej strane nadobúda po integrácii hodnotu ma^2. Podľa definície polohového vektora ťažiska (rov.(1.150)) pre integrál v poslednom vzťahu predchádzajúcej rovnice platí $\int \boldsymbol{r}_0 \mathrm{d}m = m\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$ a keďže os o_{T} prechádza ťažiskom, potom aj polohový vektor ťažiska $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$ a aj integrál $\int \boldsymbol{r}_0 \mathrm{d}m$ sú rovné nule. Teda platí

$$I = I_0 + ma^2. \tag{1.185}$$

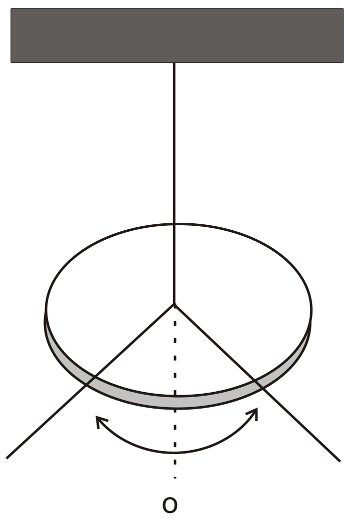
Odvodený vzťah, ktorý platí nielen pre dosku zanedbateľnej hrúbky, ale aj pre teleso ľubovoľného tvaru, sa nazýva *Steinerova veta*. Z rovnice (1.185) vyplýva, že *moment* *zotrvačnosti I telesa vzhľadom k ľubovoľnej osi je rovný súčtu momentu zotrvačnosti* I_0 *vzhľadom k osi prechádzajúcej ťažiskom a rovnobežnej s uvažovanou osou a súčinu hmotnosti telesa a druhej mocniny kolmej vzdialenosti obidvoch osí.* Zo Steinerovej vety vyplýva, že moment zotrvačnosti má v závislosti od vzdialenosti a minimum a nadobúda najmenšiu hodnotu pre os prechádzajúcu ťažiskom.

1.4.2 Kyvadlový pohyb

Pri otáčavom pohybe telesa okolo pevnej osi vektor momentu sily stále leží v tej istej priamke, avšak môže meniť svoju orientáciu a svoju veľkosť. Špeciálnym prípadom otáčavého pohybu je kyvadlový pohyb telesa, pri ktorom moment sily má vždy opačný smer ako je smer výchylky z rovnovážnej polohy a jeho hodnota je priamo úmerná veľkosti výchylky. Príkladom kyvadlového pohybu je torzné a fyzikálne kyvadlo. Obidve kyvadlá sú vhodné na experimentálne určenie momentu zotrvačnosti telies.

Torzné kyvadlo

Pohyb torzného kyvadla spôsobujú pružné sily, ktoré vznikajú pri skrúcaní vlákna alebo tyče. Torzné kyvadlo môže byť realizované pomocou dosky upevnenej v jej strede na zvislom vlákne (obr. (1.34)).



Obrázok 1.34 Znázornenie pohybu torzného kyvadla okolo zvislej osi o. Kyvadlový pohyb sa uskutočňuje vo vodorovnej rovine.

Z experimentov vyplýva, že súvis medzi momentom síl M, ktoré spôsobujú otáčavý pohyb okolo pevnej osi, a uhlom pootočenia φ z rovnovážnej polohy je daný vzťahom

$$M = -M_0\varphi\,. \tag{1.186}$$

M_0 je *torzná tuhosť* vlákna, ktorá je určená jeho elastickými vlastnosťami a geometrickými rozmermi. Pre moment sily súčasne platí pohybová rovnica (1.175)

$$M = I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{1.187}$$

Porovnaním rovníc (1.186) a (1.187) a jednoduchou úpravou dostaneme pohybovú rovnicu torzného kyvadla

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\varphi = 0\,, \tag{1.188}$$

v ktorej $\omega_0^2 = M_0/I$. Riešenie pohybovej rovnice môže byť vyjadrené pomocou závislosti

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\omega_0 t + \alpha\right), \tag{1.189}$$

v ktorej φ_0 je amplitúda pohybu vyjadrujúca maximálnu výchylku kyvadla z rovnovážnej polohy. Hodnota fázovej konštanty α závisí od voľby začiatku merania času. Z rovnice (1.189) vyplýva, že torzné kyvadlo vykonáva periodický pohyb s uhlovou frekvenciou

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M_0}{I}} \tag{1.190}$$

a periódou pohybu

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_0}}\,. \tag{1.191}$$

Výpočtom je možné ukázať, že torzná tuhosť pre vlákno kruhového prierezu polomeru r a dĺžky l má hodnotu

$$M_0 = \frac{\pi G r^4}{2l}, \tag{1.192}$$

kde G je *modul pružnosti v šmyku* materiálu, z ktorého vlákno je zhotovené.

Modul pružnosti v šmyku G môže byť určený meraním periódy torzného kyvadla. Pre jeho výpočet môžeme použiť vzťah, ktorý dostaneme elimináciou torznej tuhosti M_0 z rovníc (1.191) a (1.192).

Vzťah medzi periódou T a momenom zotrvačnosti I torzného kyvadla umožňuje experimentálne stanovenie momentu zotrvačnosti symetrických telies. Ak torzné kyvadlo zhotovíme tak, že na kruhovú dosku pôvodného kyvadla položíme symetrické teleso, pre periódu takéhoto zloženého kyvadla T' platí vzťah

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I + I'}{M_0}}, \tag{1.193}$$

v ktorom I je moment zotrvačnosti kruhovej dosky a I' je moment zotrvačnosti telesa položeného na kruhovú dosku. Z rovníc (1.191) a (1.193) pre moment zotrvačnosti symetrického telesa dostaneme

$$I' = I\left[\frac{T'^2}{T^2} - 1.\right] \tag{1.194}$$

Výpočtom integrálu (1.172) dostaneme pre moment zotrvačnosti kruhovej dosky vzťah $I = mR^2/2$. Hmotnosť kruhovej dosky m, jej polomer R a periódy T a T' zistíme meraním.

Fyzikálne kyvadlo

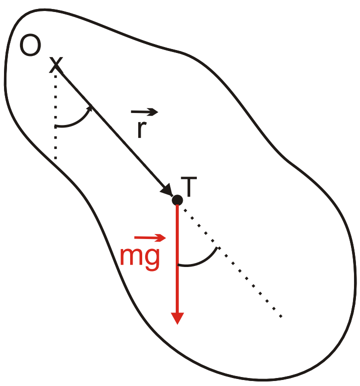
Pod fyzikálnym kyvadlom rozumieme teleso ľubovoľného tvaru, ktoré vplyvom tiažovej sily môže vykonávať kyvadlový pohyb okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom (obr. (1.35)). Budeme skúmať časovú závislosť výchylky kyvadla φ z jeho rovnovážnej polohy. Pre tento účel si na vodorovnej osi o, ktorá na obrázku je kolmá na nákresňu, zvoľme vzťažný bod O tak, že jeho vzdialenosť a od ťažiska T je súčasne aj vzdialenosťou ťažiska od osi o.

Na ľubovoľný hmotný element kyvadla pôsobí tiažová sila $\boldsymbol{g}\mathrm{d}m$, ktorej moment vzhľadom k bodu O je $\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}\mathrm{d}m$, kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor hmotného elementu vyhľadom k vzťažnému bodu O. Pre moment sily pôsobiacej na kyvadlo s hmotnosťou m platia vzťahy

$$\boldsymbol{M} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}\mathrm{d}m = \int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} \times m\boldsymbol{g}. \tag{1.195}$$

Vektor $\boldsymbol{M}$ stále leží v tej istej priamke, preto namiesto vektorovej rovnice (1.195) môžeme písať skalárnu rovnicu

$$M = amg \sin\varphi, \tag{1.196}$$



Obrázok 1.35 Pohyb fyzikálneho kyvadla okolo pevnej vodorovnej osi vlyvom tiažovej sily. Os rotácie je kolmá na nákresňu a prechádza bodom O.

v ktorej veľkosť polohového vektora ťažiska sme označili pomocou symbolu a, t. j. $|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}| = a$. Ak sa obmedzíme na malé výchylky ($\varphi < 5°$), pri ktorých $\sin\varphi \approx \varphi$, potom moment sily M bude priamoúmerný výchylke φ a ak pomocou znamienka mínus zohľadnime orientáciu momentu sily vzhľadom k výchylke φ pre moment sily môžeme písať

$$M = -amg\varphi. \tag{1.197}$$

Keďže sa opäť jedná o otáčavý pohyb okolo pevnej osi, môžeme použiť rovnicu (1.175). Po dosadení (1.197) do (1.175) a úprave dostaneme pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{1.198}$$

v ktorej $\omega_0^2 = mga/I$. Vidíme, že odvodená pohybová rovnica má taký istý tvar ako pre torzné kyvadlo. Teda φ je opäť harmonickou funkciou času s uhlovou frekvenciou ω_0 a periódou T pre ktoré platí

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{1.199}$$

a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{1.200}$$

Odvodený vzťah pre periódu fyzikálneho kyvadla môžeme využiť pre experimentálne určenie momentu zotrvačnosti I.