Úloha 1:

Strednototeplotná šachtová pec má rozmery pracovnej komory:
priemer d_1 = 600 mm, d_2 = 1000 mm, h = 2000 m. Pracovná teplota je J_p = 900 °C, teplota okolia J_o = 20 °C.

Úlohou je navrhnúť výmurovku pece z klasických materiálov a vypočítať straty za dobu 2,5 hodiny.

Riešenie

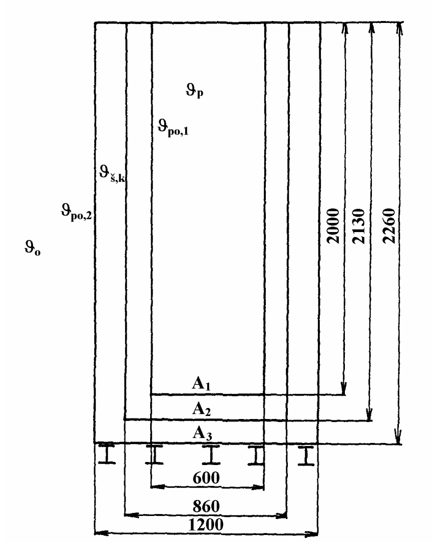
S ohľadom na pracovnú teplotu volíme dvojvrstvovú výmurovku zo šamotu a kremeliny (diatomitu). Plášť šachty dna bude oceľový. Parametre vrstiev sú (pozri náčrt výmurovky):

a) šachta pece

- šamotové tehly: $r_š$ = 1000 kg.m^{-3}, $c_š$ = 1,13 kJ.kg^{-1}.K^{-1}, $s_š$ = 130 mm
- kremelinový zásyp: $r_š$ = 550 kg.m^{-3}, $c_š$ = 0,837 kJ.kg^{-1}.K^{-1}, $s_š$ = 170 mm

b) dno pece

- šamotové tehly: $r_š$ = 1000 kg.m^{-3}, $c_š$ = 1,13 kJ.kg^{-1}.K^{-1}, $s_š$ = 130 mm
- kremelinové tehly: $r_š$ = 600 kg.m^{-3}, $c_š$ = 1,13 kJ.kg^{-1}.K^{-1}, $s_š$ = 130 mm



Postup riešenia je obdobný ako v predchádzajúcich úlohách. Po návrhu rozmerov výmurovky odhadujeme teploty pre výpočet l vrstiev a vypočítame tepelné straty s uplatnením hraničnej podmienky 3. druhu. Povrchová teplota nemá prekročiť 60 °C.

a) výpočet výmurovky stien šachty:

Odhad teplôt: J_p = 900 °C

$J_{po,1}$ = 890 °C
$J_{š,k}$ = 650 °C
$J_{po,2}$ = 60 °C
J_o = 20 °C

$J_{str,š}$ = 770 °C
$J_{str,k}$ = 355 °C

Tepelné vodivosti vrstiev:

$$l_š = 0{,}29 + 0{,}26.10^{-3}.J_{str,š} = 0{,}29 + 0{,}26.10^{-3}.770 = 0{,}49 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$l_k = 0{,}093 + 0{,}24.10^{-3}.J_{str,k} = 0{,}093 + 0{,}24.10^{-3}.355 = 0{,}1799 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Koeficienty prestupu tepla na hraniciach:

$a_1 \approx 120$ W.m^{-2}.K^{-1}

$a_2 \approx 12{,}1$ W.m^{-2}.K^{-1}

Tepelné straty povrchom valcovej šachty:

$$\Phi = \frac{p \cdot h \cdot \left(J_p - J_o\right)}{\dfrac{1}{2 \cdot a_1 \cdot r_1} + \dfrac{1}{2 \cdot l_{š}} \cdot \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \dfrac{1}{2 \cdot l_k} \cdot \ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right) + \dfrac{1}{2 \cdot a_2 \cdot r_3}} \quad [\mathrm{W}]$$

Pri dosadení za strednú výšku šachty h = 2,13 m a priemerov r_1 = 0,3 m; r_2 = 0,43 m; r_3 = 0,6 m dostaneme

$$\Phi = \frac{p \cdot 2{,}13 \cdot \left(900 - 20\right)}{\dfrac{1}{2 \cdot 120 \cdot 0{,}3} + \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}49} \cdot \ln\left(\dfrac{0{,}43}{0{,}3}\right) + \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}1799} \cdot \ln\left(\dfrac{0{,}6}{0{,}43}\right) + \dfrac{1}{2 \cdot 12{,}1 \cdot 0{,}6}} = 4279{,}4 \text{ W}$$

Kontrola odhadnutých teplôt:

$$J_{po,1} = J_p - \frac{\Phi}{p \cdot h} \cdot \frac{1}{2 \cdot a_1 \cdot r_1} = 900 - \frac{4279{,}4}{p \cdot 2{,}13} \cdot \frac{1}{2 \cdot 120 \cdot 0{,}3} = 891{,}1\,°\mathrm{C}$$

$$J_{š,k} = J_{po,1} - \frac{\Phi}{p \cdot h} \cdot \frac{1}{2 \cdot l_{š}} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 891{,}1 - \frac{4279{,}4}{p \cdot 2{,}13} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0{,}49} \cdot \ln\left(\frac{0{,}43}{0{,}3}\right) = 656{,}2\,°\mathrm{C}$$

$$J_{po,2} = J_{š,k} - \frac{\Phi}{p \cdot h} \cdot \frac{1}{2 \cdot l_k} \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) = 656{,}2 - \frac{4279{,}4}{p \cdot 2{,}13} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0{,}1799} \cdot \ln\left(\frac{0{,}6}{0{,}43}\right) = 64{,}1\,°\mathrm{C}$$

alebo

$$J_{po,2} = J_o + \frac{\Phi}{p \cdot h} \cdot \frac{1}{2 \cdot a_2 \cdot r_3} = 20 + \frac{4279{,}4}{p \cdot 2{,}13} \cdot \frac{1}{2 \cdot 12{,}1 \cdot 0{,}6} = 64\,°\mathrm{C}$$

čo je dostatočná zhoda s odhadom.

b) výpočet výmurovky dna pece:

Výpočet výmenných a stredných povrchov:

$$S_1 = p \cdot r_1^2 = p \cdot 0{,}3^2 = 0{,}283 \text{ m}^2$$

$$S_2 = p \cdot r_2^2 = p \cdot 0{,}43^2 = 0{,}581 \text{ m}^2 \qquad \frac{S_2}{S_1} = \frac{0{,}581}{0{,}283} = 2{,}053 > 2$$

$$S_3 = p \cdot r_3^2 = p \cdot 0{,}6^2 = 1{,}131 \text{ m}^2 \qquad \frac{S_3}{S_2} = \frac{1{,}131}{0{,}581} = 1{,}947 \approx 2$$

$$S_{str,š} = \sqrt{S_1 \cdot S_2} = \sqrt{0{,}283 \cdot 0{,}581} = 0{,}405 \text{ m}^2$$

$$S_{str,k} = \sqrt{S_2 \cdot S_3} = \sqrt{0{,}581 \cdot 1{,}131} = 0{,}811 \text{ m}^2$$

Odhad teplôt: J_p = 900 °C

$$\left.\begin{array}{l} J_{po,1} = 890\ °\mathrm{C} \\ J_{š,k} = 500\ °\mathrm{C} \end{array}\right\} J_{str,š} = 695\ °\mathrm{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} J_{š,k} = 500\ °\mathrm{C} \\ J_{po,2} = 60\ °\mathrm{C} \end{array}\right\} J_{str,k} = 280\ °\mathrm{C}$$

J_o = 20 °C

Tepelné vodivosti vrstiev a koeficientov prestupu tepla

$l_{š} = 0{,}29 + 0{,}26.10^{-3}.J_{str,š} = 0{,}29 + 0{,}26.10^{-3}.695 = 0{,}471$ W.m^{-1}.K^{-1}

$l_k = 0{,}131 + 0{,}233.10^{-3}.J_{str,k} = 0{,}131 + 0{,}233.10^{-3}.280 = 0{,}196$ W.m^{-1}.K^{-1}

Koeficienty prestupu tepla na hraniciach:

$a_1 \approx 120$ W.m^{-2}.K^{-1}

$a_2 \approx 11{,}2$ W.m^{-2}.K^{-1}

Tepelné straty dnom pece:

$$\Phi = \frac{J_p - J_o}{\frac{1}{a_1 \cdot S_1} + \frac{h}{l_š \cdot S_{str,š}} + \frac{h}{l_k \cdot S_{str,k}} + \frac{1}{a_2 \cdot S_3}} \qquad [W]$$

Pri dosadení dostaneme:

$$\Phi = \frac{900 - 20}{\frac{1}{120 \cdot 0{,}283} + \frac{0{,}13}{0{,}471 \cdot 0{,}405} + \frac{0{,}13}{0{,}196 \cdot 0{,}811} + \frac{1}{11{,}2 \cdot 1{,}131}} = 547{,}4 \text{ W}$$

Kontrola odhadnutých teplôt:

$$J_{po,1} = J_p - \Phi \cdot \frac{1}{a_1 \cdot S_1} = 900 - 547{,}4 \cdot \frac{1}{120 \cdot 0{,}283} = 883{,}9\ °\text{C}$$

$$J_{š,k} = J_{po,1} - \Phi \cdot \frac{h}{l_š \cdot S_{str,š}} = 883{,}9 - 547{,}4 \cdot \frac{0{,}13}{0{,}471 \cdot 0{,}405} = 510{,}8\ °\text{C}$$

$$J_{po,2} = J_{š,k} - \Phi \cdot \frac{h}{l_k \cdot S_{str,k}} = 510{,}8 - 547{,}4 \cdot \frac{0{,}13}{0{,}196 \cdot 0{,}811} = 63{,}1\ °\text{C}$$

alebo

$$J_{po,2} = J_o + \Phi \cdot \frac{1}{a_2 \cdot S_3} = 20 + 547{,}4 \cdot \frac{1}{11{,}2 \cdot 1{,}131} = 63{,}2\ °\text{C}$$

Čo je dostatočná zhoda s odhadom. Celá výmurovka je navrhnutá správne s celkovými stratami:

$\Phi_0 = 4279{,}4 + 547{,}4 = 4826{,}8$ W

Úloha 2:

V odporovej komorovej peci vyhriatej na konštantnú teplotu $J_p = 930\ °\text{C}$ je ohrievaná za účelom kalenia oceľová zápustka na kaliacu teplotu $J_{vs,k} = 900\ °\text{C}$. Počiatočná teplota vsádzky sa rovná teplote okolia a je $J_{vs,o} = J_o = 20\ °\text{C}$.

Rozmery a fyzikálne parametre vsádzky sú:

300 x 300 x 200 mm, r = 7800 kg.m^{-3}, c = 0,67 kJ.kg^{-1}.K, l = 34,9 W.m^{-1}.K^{-1}, a_{930} = a = 210 W.m^{-2}.K^{-1}.

Je potrebné vpočítať dobu ohrevu vsádzky pre 2 alternatívne prípady:

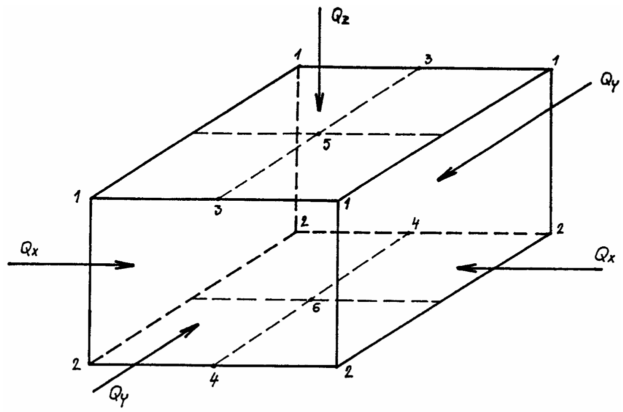
a) ohrev vsádzky sa uskutočňuje len vrchnou plochou (cez tok Q_z)

b) ohrev sa uskutočňuje vrchnou a všetkými bočnými stenami (cez toky Q_x, Q_y, Q_z)

Riešenie:

Charakteristické rozmery:

- pre alternatívu a) ako jednorozmerné teplotné pole z = 0,2 m
- pre alternatívu b) ako trojrozmerné teplotné pole x = 0,2 m
  y = 0,2 m
  z = 0,2 m



Zadaný príklad je typickou úlohou riešenia nestacionárneho teplotného poľa v pevnom prostredí, s hraničnou podmienkou 3. druhu. Ide o využitie Fourier – Kirchhoffovej diferenciálnej rovnice. Na tomto mieste použijeme bežnú technickú metódu s využitím Burdrinových diagramov.

a) ohrev vsádzky vrchnou stenou – riešenie jednorozmerného teplotného poľa v smere súradnice z:

- koeficient teplotnej vodivosti:

$$a = \frac{l}{r \cdot c} = \frac{34{,}9}{7800 \cdot 0{,}67 \cdot 10^3} = 6{,}678 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}$$

- Fourierovo kritérium

$$Fo_z = \frac{a \cdot t}{z^2} = \frac{6{,}678 \cdot 10^{-6} \cdot t}{0{,}2^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-4} \cdot t$$

- Biotovo kritérium

$$Bi = \frac{a \cdot z}{l} = \frac{210 \cdot 0{,}2}{34{,}9} = 1{,}2$$

- pomerná teplota pre konečnú teplotu vsádzky

$$J_{vs,k} = 900\ °\mathrm{C}$$

$$\Theta = \frac{J_p - J_{vs,k}}{J_p - J_o} = \frac{930 - 900}{930 - 20} = 0{,}03297 \approx 0{,}033$$

Tejto teplote a Biotovmu kritériu zodpovedá z Budrinových diagramov:

- pre hornú plochu (bod 5 v náčrte)

$$Fo_{z,p} = 3{,}8 \qquad \text{t.j.} \qquad t_p = \frac{3{,}8}{1{,}67 \cdot 10^{-4}} = 22754{,}5\ \mathrm{s} = 6{,}32\ \mathrm{hod}$$

- pre spodnú plochu (bod 6 v náčrte)

$$Fo_{z,s} = 4{,}15 \qquad \text{t.j.} \qquad t_s = \frac{4{,}15}{1{,}67 \cdot 10^{-4}} = 24850{,}3\ \mathrm{s} = 6{,}9\ \mathrm{hod}$$

Na prvý pohľad z oboch výsledkov vyplýva, že takýto ohrev je zdĺhavý, nakoľko zvolený postup riešenia je možné aplikovať len na skutočne jednorozmerné teplotné pole (čo zadaná vsádzka porovnateľných rozmerov nespĺňa). Za uvedenú dobu by sa príslušné plochy ohriali na konečnú tepotu vtedy, ak by vsádzka z ostatných strán bola dokonale izolovaná.

b) ohrev vsádzky vrchom a bočnými stenami – riešenie trojrozmerného teplotného poľa v pravouhlých súradniciach x, y, z. V smere súradníc x, y je ohrev dvojstranný (symetrický), v smere súradnice z je jednostranný (asymetrický).

- koeficient teplotnej vodivosti, ako predošle

$$a = \frac{l}{r \cdot c} = \frac{34{,}9}{7800 \cdot 0{,}67 \cdot 10^3} = 6{,}678 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2.s}$$

- Fourierove kritériá

$$Fo_x = \frac{a \cdot t}{x^2} = \frac{6{,}678 \cdot 10^{-6} \cdot t}{0{,}15^2} = 2{,}968 \cdot 10^{-4} \cdot t$$

$$Fo_y = \frac{a \cdot t}{y^2} = \frac{6{,}678 \cdot 10^{-6} \cdot t}{0{,}15^2} = 2{,}968 \cdot 10^{-4} \cdot t$$

$$Fo_z = \frac{a \cdot t}{z^2} = \frac{6{,}678 \cdot 10^{-6} \cdot t}{0{,}2^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-4} \cdot t$$

- Biotove kritériá

$$Bi_x = \frac{a \cdot x}{l} = \frac{210 \cdot 0{,}15}{34{,}9} = 0{,}903$$

$$Bi_y = \frac{a \cdot y}{l} = \frac{210 \cdot 0{,}15}{34{,}9} = 0{,}903$$

$$Bi_z = \frac{a \cdot z}{l} = \frac{210 \cdot 0{,}2}{34{,}9} = 1{,}2$$

Ďalej postupujme obrátene ako v predchádzajúcej alternatíve a vypočítajme pomerné a skutočné teploty v charakteristických bodoch vsádzky 1 až 6, pre dobu ohrevu, napr. 1,5 hod.

Odpovedajúce Fourierove kritériá sú:

$$Fo_x = Fo_y = 2{,}968 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5 \cdot 3600 = 1{,}6\,; \quad Fo_z = 1{,}67 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5 \cdot 3600 = 0{,}9$$

Pre tieto a dané Biotove kritériá určíme z Budrinových diagramov pomerné teploty na povrchu a v strede vsádzky pre každú súradnicu (stred vsádzky pre z-tovú súradnicu je spodná plocha s bodom 6 – jednostranný ohrev). Tieto sú:

- pre toky Φ_x: $\Theta_{po,x} = 0{,}25$; $\Theta_{str,x} = 0{,}37$
- pre toky Φ_y: $\Theta_{po,y} = 0{,}25$; $\Theta_{str,y} = 0{,}37$
- pre toky Φ_z: $\Theta_{po,z} = 0{,}32$; $\Theta_{str,z} = 0{,}55$

Pre výpočet výsledných pomerných teplôt je potrebné uvážiť polohu bodov 1 až 6 vzhľadom k tepelným tokom:

body 1 sú povrchové pre všetky toky Φ_x, Φ_y, Φ_z

body 2 sú povrchové pre toky Φ_x a Φ_y, stredové pre Φ_z

body 3 sú povrchové pre Φ_y a Φ_z, stredové pre Φ_x

body 4 sú povrchové pre Φ_y a stredové pre Φ_x a Φ_z

bod 5 je povrchový pre Φ_z a stredový pre Φ_x a Φ_y

bod 6 je stredový pre všetky toky Φ_x, Φ_y a Φ_z.

Potom výsledné pomerné teploty v bodoch 1 až 6 sú:

$$\Theta_1 = \Theta_{po,x} \cdot \Theta_{po,y} \cdot \Theta_{po,z} = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}32 = 0{,}02$$

analogicky

$$\Theta_2 = \Theta_{po,x} \cdot \Theta_{po,y} \cdot \Theta_{str,z} = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}55 = 0{,}034$$
$$\Theta_3 = \Theta_{po,y} \cdot \Theta_{po,z} \cdot \Theta_{po,x} = 0{,}25 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}37 = 0{,}03$$
$$\Theta_4 = \Theta_{po,x} \cdot \Theta_{str,y} \cdot \Theta_{str,z} = 0{,}25 \cdot 0{,}37 \cdot 0{,}55 = 0{,}051$$
$$\Theta_5 = \Theta_{str,x} \cdot \Theta_{str,y} \cdot \Theta_{po,z} = 0{,}37 \cdot 0{,}37 \cdot 0{,}32 = 0{,}044$$
$$\Theta_6 = \Theta_{str,x} \cdot \Theta_{str,y} \cdot \Theta_{str,z} = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}32 = 0{,}075$$

Odpovedajúce skutočné teploty v bode *i*:

$$\Theta_i = \frac{J_p - J_i}{J_p - J_o} \qquad \Rightarrow \qquad J_i = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_i$$

teda

$$J_1 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_1 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}02 = 911{,}8\ °\mathrm{C}$$
$$J_2 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_2 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}034 = 899{,}1\ °\mathrm{C}$$
$$J_3 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_3 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}03 = 902{,}7\ °\mathrm{C}$$
$$J_4 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_4 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}051 = 883{,}6\ °\mathrm{C}$$
$$J_5 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_5 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}044 = 890\ °\mathrm{C}$$
$$J_6 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_6 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}075 = 861{,}7\ °\mathrm{C}$$

Za čas 1,5 hod sa uvažovaná vsádzka neprehreje na celom povrchu na požadovanú kaliacu teplotu 900 °C. Za túto dobu je ohrev značne nerovnomerný, s maximálnym teplotným rozdielom medzi bodmi 1 a 6, $\Delta J_{1,6} = J_1 - J_6 = 50\ °\mathrm{C}$. Zvýšime preto dobu ohrevu na 1,75 hod a pre tieto extrémne body výpočet zopakujeme. Výsledky:

$$Fo_x = Fo_y = 2{,}968 \cdot 10^{-4} \cdot t = 2{,}968 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}75 \cdot 3600 = 1{,}87$$
$$Fo_z = 1{,}67 \cdot 10^{-4} \cdot t = 1{,}67 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}75 \cdot 3600 = 1{,}05$$

- pre toky Φ_x: $\Theta_{po,x} = 0{,}21$; $\Theta_{str,x} = 0{,}3$
- pre toky Φ_y: $\Theta_{po,y} = 0{,}21$; $\Theta_{str,y} = 0{,}3$
- pre toky Φ_z: $\Theta_{po,z} = 0{,}28$; $\Theta_{str,z} = 0{,}48$

V bode 1 je:

$$\Theta_1 = \Theta_{po,x} \cdot \Theta_{po,y} \cdot \Theta_{po,z} = 0{,}21 \cdot 0{,}21 \cdot 0{,}28 = 0{,}0123$$

v bode 6 je:

$$\Theta_6 = \Theta_{str,x} \cdot \Theta_{str,y} \cdot \Theta_{str,z} = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}48 = 0{,}0432$$

teda

$$J_1 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_1 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}0123 = 918{,}8\ °\mathrm{C}$$
$$J_6 = J_p - \left(J_p - J_o\right) \cdot \Theta_6 = 930 - (930 - 20) \cdot 0{,}0432 = 890{,}7\ °\mathrm{C}$$
$$\Delta J_{1,6} = J_1 - J_6 = 28{,}1\ °\mathrm{C}$$

Teplotný rozdiel medzi bodmi 1 a 6 sa podstatne znížil, teploty v oboch bodoch sú blízke požadovanej kaliacej teplote, čas 1,75 hod je možné považovať za dostatočnú dobu ohrevu predmetnej vsádzky. Teploty v ostatných bodoch 2 až 5 sa úmerne zvýšia oproti teplotám pri dobre ohrevu 1,5 hod.