Výpočet indukovaného tepla

Zákon elektromagnetickej indukcie (iné názvy: ***druhá Maxwellova rovnica***, Faradayov indukčný zákon, ***Faradayov zákon***, indukčný zákon) je fyzikálny zákon, ktorý vyslovil v roku 1831 Michael Faraday. Tento zákon popisuje vznik elektrického napätia v uzavretom elektrickom obvode, ktorý je spôsobený zmenou magnetického indukčného toku.

Magnetická indukcia ***B*** je vektorová veličina, vyjadruje silové účinky magnetického poľa na častice s nábojom.

V uzavretej vodivej slučke *C* sa zmenou magnetického indukčného toku plochou slučky *S* indukuje elektromotorické napätie. Prúd vybudený elektromagnetickou indukciou pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala.(Lenzov zákon)

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

alebo ekvivalentne v diferenciálnom tvare

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

kde ***E*** je elektrické pole, d***l*** nekonečne malý prvok slučky *C* a ***B*** je magnetická indukcia.

Biotov-Savartov zákon alebo ***Biotov-Savartov-Laplacov zákon*** opisuje magnetickú indukciu, ktorá vzniká vďaka pohybujúcemu sa náboju. Pomenovaný bol podľa dvoch francúzskych matematikov - Jean -Baptiste Biotovi a Félixovi Savartovi. Spoločne s Ampérovým zákonom o sile pôsobiacej na náboj v magnetickom poli je základným zákonom magnetostatiky.

Oersted pozoroval orientáciu magnetky v okolí vodiča pretekaného elektrickým prúdom. S pohybom elektrického náboja je vždy spojený vznik magnetického poľa, preto v okolí každého vodiča pretekaného elektrickým prúdom vzniká magnetické pole. Výpočet magnetického poľa umožňuje zákon, ktorý je zovšeobecnením experimentálnych pozorovaní Jeana Baptista Biota (1774-1862) a Felixa Savarta (1791-1841). Tento zákon vyjadruje aký je príspevok nekonečne malého úseku tenkého vodiča k magnetickej indukcii v určitom bode v okolí vodiča. Polohu bodu vzhľadom k vybranému elementu vodiča určuje polohový vektor ***r***, element vodiča charakterizuje vektor d***l***, ktorý je orientovaný v smere elektrického prúdu. ***Biotov-Savartov zákon*** má tvar

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Matematicky tento zákon formuloval Pierre Simon de Laplace (1749-1827) a niekedy sa tiež nazýva ***Biotov-Savartov-Laplaceov zákon***.

Konštanta μ_0 sa nazýva permeabilita vákua (tiež magnetická konštanta). Má presnú hodnotu a veľkosť tejto konštanty v sústave SI súvisí s definíciou ampéru. Veľkosť permeability vákua je $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}$. Rozmer tejto konštanty je $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{A}^{-2}$. Permeabilitu vákua môžeme vyjadriť aj pomocou jednotky indukčnosti 1 henry, potom jej rozmer je $\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Biotov-Savartov zákon je zákon v diferenciálnom tvare. Magnetickú indukciu v okolí určitého vodiča dostaneme integráciou elementárnych príspevkov d***B*** cez celý vodič

$$\boldsymbol{B} = \int_{\text{vodič}} dB = \int_{\text{vodič}} \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Príklad 1

Určite indukciu a intenzitu magnetického poľa v strede kruhového vodiča s polomerom R = 5 cm, keď ním preteká prúd I = 5 A.

Riešenie:

Magnetická indukcia v strede kruhového závitu A od elementu vodiča d$\boldsymbol{l}$ je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Keďže vektor d$\boldsymbol{l}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}$ zvierajú vždy uhol 90 °, možno písať

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\mathrm{d}s \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{r^2}$$

A magnetická indukcia v strede kruhového závitu A od celého vodiča bude mať hodnotu

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi \cdot r} \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r}$$

a smeruje kolmo pred nákresňu.

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}} \cdot 5\ \mathrm{A}}{2 \cdot 0{,}05\ \mathrm{m}} = 0{,}2 \cdot \pi \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Wb \cdot m^{-2}} = 628{,}319 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}$$

Intenzita magnetického poľa v strede kruhového závitu A bude:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2 \cdot r} = \frac{5\ \mathrm{A}}{2 \cdot 0{,}05\ \mathrm{m}} = 500\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$$

Príklad 2

Vypočítajte indukciu a intenzitu magnetického poľa v strede a na konci solenoidu dĺžky l = 1 m, s počtom závitov z = 2000 a polomerom R = 2 cm, keď závitmi preteká prúd I = 5 A.

Riešenie:

Podľa vzťahu pre magnetickú indukciu kruhového vodiča element hrúbky dx, meranej v smere osi, prispieva v ľubovoľnom bode A na osi k magnetickej indukcii hodnotou

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R}{2 \cdot \left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{z}{l} \cdot \mathrm{d}x$$

kde x je vzdialenosť elementu dx od bodu A meraná na osi solenoidu a $\frac{z}{l}$ je počet závitov pripadajúcich na jednotkovú dĺžku solenoidu. Celý solenoid vzbudzuje teda v bode A na osi, ktorého vzdialenosť od stredu solenoidu je a, magnetickú indukciu s hodnotou

$$B = \int_{-\frac{l}{2}+a}^{+\frac{l}{2}+a} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R}{2 \cdot \left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{z}{l} \cdot \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot z}{2 \cdot l} \cdot \left[\frac{\frac{l}{2} - a}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{l}{2} + a\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + a}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + a\right)^2}} \right]$$

Keď do vzorca pre indukciu B vo všeobecnom mieste dosadíme a = 0, resp. $a = \frac{l}{2}$, dostaneme výrazy pre B v miestach 0, resp. B.

a) a = 0

$$B=\frac{\mu_0\cdot I\cdot z}{l\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2\cdot R}{l}\right)^2}}=\frac{4\cdot\pi\cdot10^{-7}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}\cdot A^{-2}}\cdot5\ \mathrm{A}\cdot2000}{1\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2\cdot0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}}\cong4\cdot\pi\cdot10^{-3}\ \mathrm{T}$$

$$H=\frac{B}{\mu_0}=\frac{z\cdot I}{l\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2\cdot R}{l}\right)^2}}==\frac{5\ \mathrm{A}\cdot2000}{1\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2\cdot0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}}=10^4\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$$

b) $a=\frac{l}{2}$

$$B=\frac{\mu_0\cdot I\cdot z}{2\cdot l\cdot\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}=\frac{4\cdot\pi\cdot10^{-7}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}\cdot A^{-2}}\cdot5\ \mathrm{A}\cdot2000}{2\cdot1\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}}\cong\frac{2\cdot\pi}{10^3}\ \mathrm{Wb\cdot m^{-2}}=2\cdot\pi\cdot10^{-3}\ \mathrm{T}$$

$$H=\frac{B}{\mu_0}=\frac{z\cdot I}{2\cdot l\cdot\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}}==\frac{5\ \mathrm{A}\cdot2000}{2\cdot1\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}}\cong0{,}5\cdot10^4\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$$

Z výsledkov je vidieť, že v prípade b) majú B a H približne polovičné hodnoty ako v prípade a)