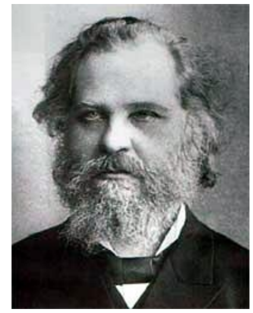
Umovova teoréma a Umovov vektor



Ak budeme uvažovať také prostredie (neizolovanú termodynamickú sústavu), na hranici ktorého je možná výmena tepla všetkými troma spôsobmi a v dôsledku tejto dochádza k zmenám jednotlivých zložiek energie prostredia, zodpovedajúci nestacionárny dej vyjadruje diferenciálna rovnica v tvare

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(w_u + w_\mathrm{k} + w_\mathrm{p} + w_\mathrm{r}\right) + \mathrm{div}\left(\boldsymbol{q}_\mathrm{v} + \boldsymbol{q}_\mathrm{k} + \boldsymbol{q}_\mathrm{r}\right) = q_\mathrm{z} \qquad [\mathrm{W.m^{-3}}] \qquad (1)$$

Prvý člen rovnice vyjadruje časovú zmenu jednotlivých foriem energie v prostredí, vyjadrenú ich objemovými hustotami, menovite:

- hustotou vnútornej energie $w_u = r \cdot c \cdot J$ [J.m^{-3}] (2)
- hustotou kinetickej energie $w_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot v^2$ (3)
- hustotou potenciálnej energie $w_\mathrm{p} = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot w_{\mathrm{p}i}$ (4)
- hustotou žiarivej energie w_r [J.m^{-3}]

Druhý člen predstavuje toky energie do alebo z prostredia prenosom tepla vedením, prúdením a sálaním, vyjadrené ich hustotami.

Napokon tretí člen q_z [W.m^{-3}] je merný výkon vnútorného zdroja, ak taký v prostredí existuje.

Rovnica (1) teda vyjadruje energetickú bilanciu prostredia, ktoré je v interakcii s okolím (zákon o zachovaní energie v termodynamickej neizolovanej sústave): K časovej zmene jednotlivých foriem energie v objeme prostredia dochádza v dôsledku prenosu (tokov) energie formou tepla na hranici tohto prostredia s okolím, pri spoluúčasti vnútorného zdroja. Ak v prostredí neexistuje vnútorný zdroj, pravá strana rovnice sa prirodzene rovná nule. Pretože v rovnici sa vyskytujú rôzne možné formy energie a možné spôsoby jej prenosu je univerzálnou a nazýva sa ***všeobecná diferenciálna rovnica šírenia energie*** v rôznych prostrediach.

Diferenciálna rovnica pre prenos energie žiarením

$$\frac{\partial w_\mathrm{r}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_\mathrm{r} = 0 \qquad (5)$$

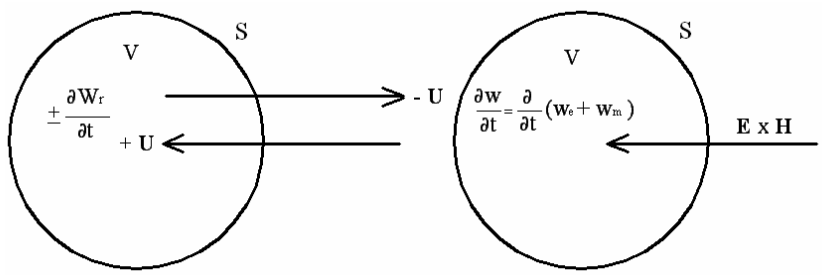
čo je rovnica šírenia žiarivej energie pri termodynamickej rovnováhe.
Po rozpísaní operátora divergencie podľa súradníc prostredia dostávame rovnicu

$$\frac{\partial w_\mathrm{r}}{\partial t} + \frac{\partial q_{\mathrm{r},x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{\mathrm{r},y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{\mathrm{r},z}}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

s fyzikálnym významom: V žiarivom prostredí vždy existujú tri funkcie q_x, q_y, q_z s vlastnosťou, že súčet ich prvých derivácií podľa súradníc x, y, z udáva zmenšenie hustoty energie v danom bode prostredia za jednotku času. Tieto funkcie predstavujú hustotu tokov energie. Túto teorému vyslovil ruský fyzik N. A. Umov v r. 1874 a vyjadruje vlastne zákon o zachovaní žiarivej (elektromagnetickej) energie. Voľne sa dá interpretovať tiež takto (obr. nižšie): Tokom (prítokom alebo výtokom) žiarivej energie cez uzavretý povrch s plochou S určitého prostredia o objeme V, dochádza k zmene energie častíc tohto prostredia (prírastku alebo úbytku). Ak energiu prostredia

W_r znova vyjadríme jej objemovou hustotou a tok žiarivej energie vektorom jeho hustoty, matematické vyjadrenie Umovovej teorémy tiež bude:

$$\oint_S \boldsymbol{q}_\mathrm{r}\,\mathrm{d}S = -\frac{\partial W_\mathrm{r}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int w_\mathrm{r}\cdot\mathrm{d}V \tag{7}$$



Umovov vektor *Poyntingov vektor*

Nakoľko pravá strana rovnice (7) fyzikálne znamená zmenu energie prostredia za jednotku času, predmetnej rovnici prináleží tiež tvrdenie, že tok energie prostredím sa rovná rýchlosti zmeny energie v tomto prostredí v_w

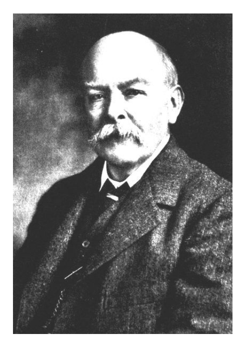
$$\oint_S \boldsymbol{q}_\mathrm{r}\cdot\mathrm{d}S = -\int_V v_w\cdot\mathrm{d}V \tag{8}$$

V rovniciach (7), resp. (8) vektor hustoty toku žiarivej energie $\boldsymbol{q}_\mathrm{r}$ je zvykom nazývať ***Umovov vektor*** a označuje sa $\boldsymbol{U}$. V diferenciálnom zápise má Umovova teoréma tvar

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_\mathrm{r} \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{U} = -\frac{\partial w_\mathrm{r}}{\partial t} = -v_w \tag{9}$$

alebo jednoducho $U = w_\mathrm{r}\cdot v$, čo tiež znamená, že Umovov vektor sa rovná súčinu objemovej hustoty žiarivej energie a rýchlosti jej prenosu v [m.s^{-1}]. Umovov vektor závisí vždy od vlastností prostredia a charakteru šírenia energie.

Poyntingov žiarivý vektor



V teórii elektrických ohrevov je použiteľný Umovov vektor ako prostriedok k vyjadrovaniu prenosu energie elektromagnetického poľa a jej premeny na teplo v ohrievanom materiáli. Ak ľubovoľný materiál, vodivý alebo nevodivý, magnetický či nemagnetický, v pevnej alebo inej fáze podrobíme pôsobeniu elektromagnetického poľa, tok energie do materiálu ovplyvňujú veličiny, ktoré jednoznačne definujú pole. Takými veličinami sú elektrická a magnetická zložka intenzity elektromagnetického poľa.

Objemové hustoty energie od oboch zložiek elektromagnetického poľa sú:

- v stacionárnom elektrickom poli

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\cdot e\cdot\boldsymbol{E}^2 \tag{10}$$

- v stacionárnom magnetickom poli

$$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\boldsymbol{H}^2 \tag{11}$$

Súčet rovníc určuje celkovú objemovú hustotu energie elektromagnetického poľa

$$w = \frac{1}{2}\cdot\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e\cdot\boldsymbol{E}^2 + m\cdot\boldsymbol{H}^2\right) \qquad [\mathrm{J.m^{-3}}] \tag{12}$$

Ak túto rovnicu budeme aplikovať na nestacionárne pole, potom zodpovedajúce časové derivácie oboch zložiek energie poľa fyzikálne vyjadrujú ich zmenu, inými slovami prenos objemovej hustoty energie poľa za jednotku času

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\mathrm{e}}+w_{\mathrm{m}}\right)=e\cdot\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+m\cdot\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\qquad[\mathrm{W.m^{-3}}]\qquad(13)$$

Rovnicu (13) konkretizujme na nevodivé prostredie (g = 0):

S využitím Maxwellových rovníc rovnica (13) sa jednoducho transformuje na tvar buď v diferenciálnom zápise

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mathrm{div}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)\qquad(14)$$

alebo integrálnom (pre celý objem nevodivého prostredia)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w\cdot\mathrm{d}V+\oint_S\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\qquad(15)$$

Fyzikálna interpretácia ostatnej rovnice je: prírastok energie v objeme nevodivého prostredia za jednotku času sa rovná toku energie do tohto objemu cez obalovú plochu ***S***, transportovanej v elektromagnetickej forme. Je to teda rovnica energetickej bilancie nevodivého prostredia, vyjadrená výkonmi. Hustotu toku energie charakterizuje vektorový súčin $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ ktorý do teórie elektromagnetického poľa zaviedol anglický fyzik John Poynting r. 1885. Nazýva sa ***Poyntingov žiarivý vektor***. Ak porovnáme rovnicu (7) s rovnicou (15) resp. rovnicu (9) s (14) hneď zistíme, že sú identické. Znamená to, že Poyntingov žiarivý vektor je Umovov vektor, vyjadrovaný pomocou zložiek ***E*** a ***H*** intenzity aktuálneho elektromagnetického poľa. Teda pre nevodivé prostredie platí

$$\boldsymbol{N}\equiv\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}_N=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\times\frac{\boldsymbol{B}}{m_0}=\frac{1}{m_0}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\ [\mathrm{W.m^{-2}}]\qquad(16)$$

kde vektor $\boldsymbol{S}_N$ má smer šírenia sa vlny. Keďže polia ***E*** a ***B*** sú navzájom na seba kolmé a v nevodivom prostredí sa šíria rýchlosťou svetla *c*, môžeme sa ľahko presvedčiť, že veľkosť vektora $\boldsymbol{S}_N$ je (uplatnením vzťahu $E=c\cdot B$ a $c=\frac{1}{\sqrt{m_0\cdot e_0}}$)

$$\left|\boldsymbol{S}_N\right|=\frac{\left|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right|}{m_0}=\frac{E\cdot B}{m_0}=c\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e_0\cdot E^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{m_0}\right)=\frac{c\cdot B^2}{m_0}=c\cdot e_0\cdot E^2=S_N\qquad(17)$$

Tým, že sme Poyntingov žiarivý vektor odvodili pre nevodivé prostredie neznamená, že sa uplatňuje len pri tejto podmienke. Naopak, v súvislosti s elektrotepelnou konverziou má zásadný význam aj pre vodivé prostredie, ako vhodný prostriedok pre vyjadrovanie prenosu energie elektromagnetického poľa do takého prostredia a tým aj generovania tepla v ňom.

Príklad 1

Vo vrchných vrstvách atmosféry Zeme je stredná hodnota veľkosti Poyntingovho vektora $\overline{S}_N$ = 1,35.10^3 W.m^{-2}. Táto hodnota sa nazýva *solárna konštanta*.

a) Aké sú veľkosti elektrického a magnetického poľa za predpokladu, že slnečné elektromagnetické žiarenie je rovinná sínusová vlna?

b) Aký je celkový priemerný výkon vyžiarený Slnkom? Stredná vzdialenosť Zem-Slnko je r_0 = 1,5.10^{11} m.

Riešenie:

a) Stredná hodnota Poyntingovho vektora súvisí s amplitúdou elektrického poľa podľa vzťahu

$$\overline{S}_N = c \cdot \frac{1}{2} \cdot e_0 \cdot E_{\max}^2$$

Odkiaľ amplitúda elektrického poľa je

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \overline{S}_N}{c \cdot e_0}} = 1{,}01 \cdot 10^3 \text{ V.m}^{-1}$$

Zodpovedajúca veľkosť magnetického poľa je

$$B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = 3{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Pozn.: toto magnetické pole je menšie ako jedna desatina magnetického poľa Zeme.

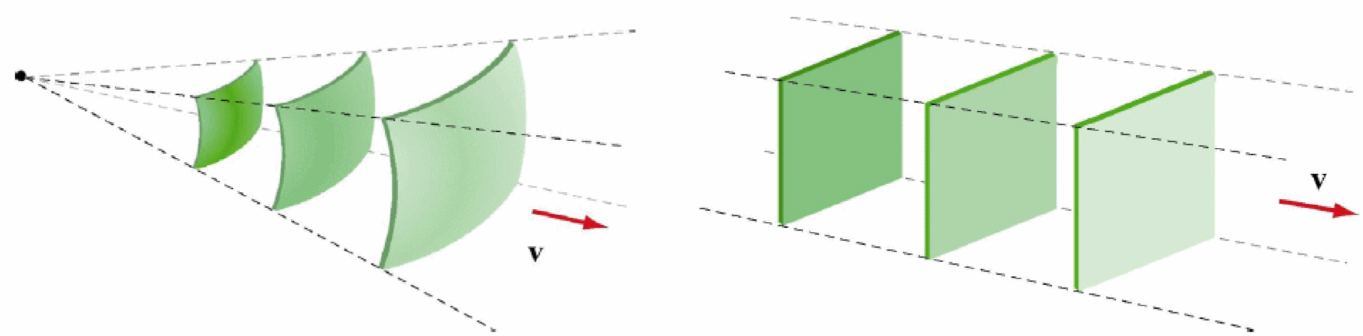
b) Celková stredná hodnota výkonu vyžiareného Slnkom vo vzdialenosti r_0 je

$$\overline{P} = \overline{S}_N \cdot S = \overline{S}_N \cdot \left(4 \cdot p \cdot r_0^2\right) = 3{,}8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Typ vlny, v tomto prípade, je sférická vlna (obr. vľavo). Táto vlna vychádza z „bodového“ zdroja. Intenzita vo vzdialenosti r od zdroja je

$$I = \overline{S}_N = \frac{\overline{P}}{4 \cdot p \cdot r^2}$$

a klesá ako funkcia 1/r^2. Naopak, intenzita rovinnej vlny (obr. vpravo) zostáva konštantná a nie sú tu žiadne straty energie.



Príklad 2

Spočítajte intenzitu stojatej elektromagnetickej vlny danú vzťahom

$$E_y(x,t) = 2 \cdot E_{\max} \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \cos(w \cdot t) \qquad B_z(x,t) = 2 \cdot B_{\max} \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \sin(w \cdot t)$$

Riešenie:

Poyntingov vektor stojatej vlny je

$$\boldsymbol{S}_N = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{m_0} = \frac{1}{m_0} \cdot \left[2 \cdot E_{\max} \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \cos(w \cdot t) \cdot \boldsymbol{j}\right] \times \left[2 \cdot B_{\max} \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \sin(w \cdot t) \cdot \boldsymbol{k}\right] =$$

$$= \frac{4 \cdot E_{\max} \cdot B_{\max}}{m_0} \cdot [\sin(k \cdot x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(w \cdot t) \cdot \cos(w \cdot t)] \cdot \boldsymbol{i} =$$

$$= \frac{E_{\max} \cdot B_{\max}}{m_0} \cdot [\sin(2 \cdot k \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot w \cdot t)] \cdot \boldsymbol{i}$$

Časová stredná hodnota $\overline{S}_N$ je

$$\overline{S}_N = \frac{E_{\max} \cdot B_{\max}}{m_0} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot w \cdot t) = 0$$

Tento výsledok sme mohli očakávať, pretože stojatá vlna sa nešíri. Teda, energie, ktoré sú prenášané dvomi vlnami šíriacimi sa v opačných smeroch tak, že vytvoria stojaté vlny sa navzájom vyrušia. To znamená, že nedochádza k prenosu energie.

Príklad 3

Predpokladajme, že elektrické pole rovinnej elektromagnetickej vlny je dané vzťahom

$$E(z,t) = E_{\max} \cdot \cos(k \cdot z - w \cdot t) \cdot \boldsymbol{i}$$

Určite nasledujúce hodnoty:

a) Smer šírenia vlny.
b) Zodpovedajúce magnetické pole $\boldsymbol{B}$.

Riešenie:

a) Po prepísaní argumentu funkcie kosínus $(k \cdot z - w \cdot t) = k \cdot (z - c \cdot t)$, kde $w = c \cdot k$ vidíme, že smer šírenia vlny je $+z$.

b) Smer šírenia elektromagnetickej vlny je rovnaký ako smer Poyntingovho vektora, ktorý je daný $\boldsymbol{S}_N = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{m_0}$. Navyše vieme, že polia $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ sú na seba navzájom kolmé. Teda $\boldsymbol{E} = E(z,t) \cdot \boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{S}_N = S_N \cdot \boldsymbol{k}$. Potom bude $\boldsymbol{B} = B(z,t) \cdot \boldsymbol{j}$. Znamená to, že $\boldsymbol{B}$ sa šíri v kladnom smere osi $+y$. Pretože $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ sú navzájom v rovnakej fáze, môžeme napísať

$$\boldsymbol{B}(z,t) = B_{\max} \cdot \cos(k \cdot z - w \cdot t) \cdot \boldsymbol{j}$$

K nájdeniu veľkosti $\boldsymbol{B}$ použijeme Faradayov zákon:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

ktorý vedie k

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}.$$

Z týchto rovníc dostaneme

$$-E_{\max} \cdot k \cdot \sin(k \cdot z - w \cdot t) = -B_{\max} \cdot w \cdot \sin(k \cdot z - w \cdot t)$$

alebo

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{w}{k} = c.$$

Magnetické pole je teda dané vzťahom

$$\boldsymbol{B}(z,t) = \left(\frac{E_{\max}}{c}\right) \cdot \cos(k \cdot z - w \cdot t) \cdot \boldsymbol{j}$$