Vlnové rovnice elektromagnetického poľa

Termínom ***elektromagnetické pole*** sa všeobecne označuje forma hmoty, ktorá je vybudená pohybom elektrických nábojov. Má teda určitú hmotnosť, energiu, hybnosť a moment hybnosti. Interakcia elektromagnetického poľa s akoukoľvek látkou sa vždy uskutočňuje prostredníctvom elektrických nábojov obsiahnutých v látke. Elektromagnetické pole, ktoré sa šíri konečnou rýchlosťou sa nazýva ***elektromagnetická vlna***. Elektromagnetická vlna vo vákuu sa šíri rýchlosťou svetla. Elektromagnetické pole má dve zložky, ***elektrickú*** a ***magnetickú***. Elektrickú zložku poľa charakterizuje ***intenzita elektrického poľa E***, magnetická zložka poľa sa spravidla vyjadruje ***intenzitou magnetického poľa H***. Vektory oboch intenzít sú navzájom kolmé.

Elektromagnetické pole rovnako ako všeobecné elektromagnetické vlnenie (žiarenie) má súčasne korpuskulárny ako aj vlnový charakter. Pri veľkých súboroch kvánt (fotónov), ustupuje diskrétna štruktúra poľa a prevláda vlnová, teda elektromagnetické pole sa považuje za spojito rozložené v priestore.

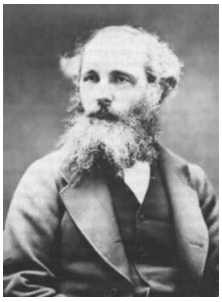
Maxwellove rovnice – sú základné parciálne diferenciálne rovnice teórie elektromagnetického poľa, ktoré popisujú jeho makroskopické zákonitosti. Pre nepohybujúce sa prostredie – priestor vyplnený látkou, ktoré je homogénne, izotropné a lineárne sa udávajú v nasledujúcom poradí a tvare

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \gamma \cdot \boldsymbol{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D} = \rho_0 \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0 \qquad (4)$$



Tieto štyri Maxwellove rovnice je zvykom dopĺňať tzv. materiálovými rovnicami, ktoré vyjadrujú vplyv prostredia na javy prebiehajúce v elektromagnetickom poli. Pre skôr definované prostredie sú to tieto:

$$\boldsymbol{J} = \gamma \cdot \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \cdot \boldsymbol{H} \qquad (5)$$

kde γ je konduktivita prostredia [S.m^{-1}]
ε je permitivita prostredia [F.m^{-1}]
μ je permeabilita prostredia [H.m^{-1}]

Ak v elektromagnetickom poli sa nenachádza voľný elektrický náboj, prirodzene $\rho_0 = 0$ a teda aj

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D} = 0 \qquad (6)$$

V súvislosti s modelovaním viacerých metód elektrických ohrevov je výhodné nahradiť Maxwellove rovnice (1) a (2) takými rovnicami, v ktorých bude len jedna premenná zložka intenzity elektromagnetického poľa, t.j. buď elektrická ***E*** alebo magnetická ***H***. Tento typ rovníc nazývame ***všeobecné rovnice šírenia elektromagnetickej vlny*** (ďalej EMV) alebo ***vlnové rovnice elektromagnetického poľa*** (ďalej EMP). Spolu s podmienkami jednoznačnosti tvoria matematický model v priestore sa šíriaceho EMP, teda model EMV. Transformácia Maxwellových rovníc na vlnové je jednoduchá, postup naznačíme pre magnetickú zložku intenzity EMP.

Najskôr na 1. Maxwellovu rovnicu (1) uplatníme ďalšiu rotáciu:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}) = \mathrm{rot}(\gamma \cdot \boldsymbol{E}) + \mathrm{rot}\left(\varepsilon \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{7}$$

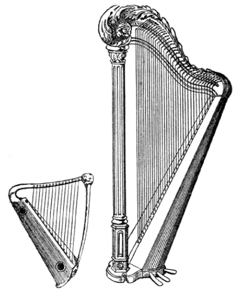
Zavedením zjednodušenia, že materiálové veličiny sú konštantné, môžeme ich vybrať pred výraz:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}) = \gamma \cdot \mathrm{rot}(\boldsymbol{E}) + \varepsilon \cdot \mathrm{rot}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{8}$$

Dosadením 2. Maxwellovej rovnice (2) do výrazu (8) dostávame:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}) = -\gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{9}$$

V ďalšom výpočte využijeme operátor nabla ∇, ktorý pre vektorové operácie má nasledovné vyjadrenie:



$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \boldsymbol{k}$$

pre ***gradient*** skalárnej funkcie f:

$$\mathrm{grad\ f} = \nabla \mathrm{f} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial z} \cdot \boldsymbol{k}$$

$\nabla(\mathrm{f} \cdot \mathrm{g}) = \mathrm{f} \cdot (\nabla \mathrm{g}) + \mathrm{g} \cdot (\nabla \mathrm{f})$ (vyjadrenie podobné 1. derivácii súčinu)

pre ***divergenciu*** vektorovej funkcie $\boldsymbol{v}(x, y, z) = v_x \cdot \boldsymbol{i} + v_y \cdot \boldsymbol{j} + v_z \cdot \boldsymbol{k}$:

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

pre ***rotáciu*** vektorovej funkcie $\boldsymbol{v}(x, y, z) = v_x \cdot \boldsymbol{i} + v_y \cdot \boldsymbol{j} + v_z \cdot \boldsymbol{k}$:

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \cdot \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \cdot \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \cdot \boldsymbol{k} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

Pozn.: Rotácia v bode udáva lokálnu mieru rotácie (otočenia), definovanú týmto poľom.
a ešte ***Laplaceov*** matematický operátor Δ:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Druhé derivácie vektorových funkcií využitím operátora nabla budú vypadať nasledovne:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad\ f}) = \nabla \cdot (\nabla \mathrm{f})$$
$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad\ f}) = \nabla \times (\nabla \mathrm{f})$$
$$\Delta \mathrm{f} = \nabla^2 \mathrm{f}$$
$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$$
$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v})$$
$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$$
$$\Delta \boldsymbol{v} = \nabla^2 \boldsymbol{v}$$

Niektoré *vlastnosti* vektorových funkcií:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad\ f}) = \nabla \times (\nabla \mathrm{f}) = 0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) = \nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} = 0$$
$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\mathrm{f}) = \nabla\cdot(\nabla\mathrm{f}) = \nabla^2\mathrm{f} = \Delta\mathrm{f}$$
$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \nabla^2\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v}\cdot\nabla$$

Využitím operátora nabla ∇ bude ďalší výpočet nasledovný (pokračovanie rovnice (9)):

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) = -\gamma\cdot\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\cdot\mu\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{10}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H}) - \nabla^2\boldsymbol{H} = -\gamma\cdot\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\cdot\mu\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{11}$$

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}) - \nabla^2\boldsymbol{H} = -\gamma\cdot\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\cdot\mu\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{12}$$

Využitím 4. Maxwellovej rovnice (4) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$, teda aj $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0$, dostávame:

$$\mathrm{grad}(0) - \nabla^2\boldsymbol{H} = -\gamma\cdot\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\cdot\mu\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{13}$$

$$-\nabla^2\boldsymbol{H} = -\gamma\cdot\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\cdot\mu\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{14}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H} - \gamma\cdot\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \varepsilon\cdot\mu\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{15}$$

čo je vlnová rovnica pre magnetickú zložku intenzity EMP. Rovnakým postupom, t.j. uplatnením ďalšej rotácie v 2. Maxwellovej rovnici (2), získame analogickú vlnovú rovnicu pre elektrickú zložku intenzity predmetného poľa, teda

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \gamma\cdot\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \varepsilon\cdot\mu\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{16}$$

Rovnice (15) a (16) tvoria sústavu všeobecných rovníc šírenia EMV. Ich všeobecnosť vyplýva z toho, že platia pre ľubovoľné elektrické prostredie (*nevodivé* aj *vodivé*) a pre ľubovoľný časový priebeh premenných $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ EMP. S ohľadom na naše ďalšie používanie ich upravme pre časovo harmonický priebeh oboch zložiek, teda časové vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{H}$ vyjadríme rotujúcimi fázormi v komplexnej rovine. Pre tieto potom postupne platí

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_m\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}; \qquad \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = j\cdot\omega\cdot\boldsymbol{E}_m\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = j\cdot\omega\cdot\underline{\boldsymbol{E}};$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\cdot\boldsymbol{E}_m\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = -\omega^2\cdot\underline{\boldsymbol{E}} \tag{17}$$

podobne

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H}_m\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}; \qquad \frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} = j\cdot\omega\cdot\boldsymbol{H}_m\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = j\cdot\omega\cdot\underline{\boldsymbol{H}};$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\omega^2\cdot\boldsymbol{H}_m\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = -\omega^2\cdot\underline{\boldsymbol{H}} \tag{18}$$

S využitím zápisov (17) a (18) rovnice (15) a (16) budú mať konkrétnejší obsah a po úprave tvar

$$\nabla^2\underline{\boldsymbol{H}} + (\omega^2\cdot\varepsilon\cdot\mu - j\cdot\omega\cdot\gamma\cdot\mu)\cdot\underline{\boldsymbol{H}} = \nabla^2\underline{\boldsymbol{H}} + k^2\underline{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{19}$$

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{E}} + \left(\omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu\right) \cdot \underline{\boldsymbol{E}} = \nabla^2 \underline{\boldsymbol{E}} + k^2 \underline{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{20}$$

Sú to ***vlnové rovnice harmonického EMP***, vyjadrujú šírenie magnetickej a elektrickej zložky tej istej harmonickej EMV v elektricky ľubovoľnom prostredí. Elektrické vlastnosti prostredia a uhlová rýchlosť vlnenia, obsiahnuté v rovnakom dvojčlene oboch rovníc sumarizuje konštanta šírenia vlnenia, resp. vlnové číslo *k*, t.j.

$$\boldsymbol{k}^2 = \omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \left(\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon\right) \tag{21}$$

teda v komplexnej rovine má reálnu zložku a imaginárnu zložku

$$\boldsymbol{k} = \sqrt{-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \left(\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon\right)} = \alpha - j \cdot \beta \qquad [\mathrm{rad.m^{-1}}] \tag{22}$$

Obe zložky, reálne a kladné, vyčíslime dosadením (22) do (21). Po úprave dostaneme:

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon}\right)^2}\right]} \qquad [\mathrm{rad.m^{-1}}] \tag{23}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon}\right)^2}\right]} \qquad [\mathrm{rad.m^{-1}}] \tag{24}$$

Zložka α sa nazýva ***fázová konštanta*** (činiteľ fázy), zložka β je ***konštanta tlmenia*** (tiež merný útlm alebo činiteľ tlmenia).

Napokon úpravou predmetných konštánt (22) až (24) pre elektricky konkrétne prostredie a prostredníctvom nich aj vlnové rovnice harmonického EMP (19) a (20). Využijeme pritom známe vzťahy medzi fyzikálnymi konštantami, ako

$$c_0^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}; \qquad v^2 = \frac{1}{\mu \cdot \varepsilon} = \frac{c_0^2}{\mu_\mathrm{r} \cdot \varepsilon_\mathrm{r}}; \qquad \lambda = \frac{v}{f} \tag{25}$$

postupne pre rýchlosť EMV vo vákuu, pre rýchlosť EMV v prostredí s permeabilitou μ a permitivitou ε a pre vlnovú dĺžku λ.

Úpravou dostaneme:

- pre elektricky ***nevodivé*** prostredie, t.j. $\gamma = 0$:

$$k^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon; \qquad k = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{\omega}{v};$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot (1+1)} = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = k = \frac{\omega}{v}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot (1-1)} = 0 \tag{26}$$

Zodpovedajúce vlnové rovnice pre nevodivé prostredie sú:

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{H}} + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \underline{\boldsymbol{H}} = \nabla^2 \underline{\boldsymbol{H}} + \alpha^2 \underline{\boldsymbol{H}} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \underline{\boldsymbol{E}} = \nabla^2 E + \alpha^2 \underline{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{27}$$

Z transformovaných vzťahov v sústave (27) vyplýva:

V dokonale nevodivom prostredí elektromagnetická vlna sa neutlmuje ($\beta = 0$), konštanta šírenia vlnenia *k* sa redukuje na fázovú konštantu α, teda na reálne číslo. Rýchlosť šírenia a vlnová dĺžka EMV v nevodivom prostredí sú

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{\omega}{\alpha}; \qquad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\alpha} \tag{28}$$

teda závisia od frekvencie zdroja vlnenia a od fyzikálnych vlastností prostredia (μ a ε).

- pre elektricky ***vodivé*** prostredie, t.j. $\gamma > 0$, $\gamma >> \omega \cdot \varepsilon$

$$k^2 = -j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu ; \qquad k = \sqrt{-j} \cdot \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu} = \frac{1-j}{a}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu}{2}} = \frac{1}{a}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon}} = \alpha = \frac{1}{a} \qquad (29)$$

Zodpovedajúce vlnové rovnice pre vodivé prostredie sú

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{H}} - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \underline{\boldsymbol{H}} = 0$$

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{E}} - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \underline{\boldsymbol{E}} = 0 \qquad (30)$$

Vo vodivom prostredí konštanta šírenia vlny je komplexným číslom, fázová konštanta a konštanta tlmenia sú si číselne rovné. Fyzikálne to znamená, že vodivé prostredie elektromagnetickú vlnu vždy utlmuje. Mierou utlmovania je veličina

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma \cdot \mu}} \qquad [\mathrm{m}] \qquad (31)$$

ktorú sme získali z úprav konštánt (29) a ktorá sa nazýva ***ekvivalentná hĺbka vniku EMV***. Všeobecne poskytuje predstavu o vplyve prostredia (γ a μ) a frekvencie zdroja EMP na jeho rozloženie v predmetnom vodivom prostredí. Rýchlosť šírenia a vlnová dĺžka EMV v tomto prostredí sú tiež funkciou hĺbky vniku, nakoľko

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \omega \cdot a = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot a ; \qquad \lambda = \frac{v}{f} = 2 \cdot \pi \cdot a \qquad (32)$$

Čím je menšia hĺbka vniku EMV do vodivého prostredia, tým viac sa zmenšuje jej rýchlosť a vlnová dĺžka. Fyzikálne hĺbka vniku odpovedá vzdialenosti od povrchu telesa, v ktorej sa dopadajúca rovinná elektromagnetická vlna utlmí na 95 % z intenzity na povrchu.

Príklad 1

Vypočítajte hĺbku vniku elektromagnetickej vlny do medi pri frekvenciách 50 Hz, 500 Hz, 10 kHz, 100 kHz, 1 MHz a 10 MHz. Vodivosť medi je 6,43.10^7 S/m, relatívna permeabilita je rovná jednej. Aký je odpor kruhového plného vodiča s priemerom 2 mm pri týchto frekvenciách v porovnaní s jeho odporom pri jednosmernom prúde?

Riešenie:

Pre hĺbku vniku platí vzťah:

$$a=\sqrt{\frac{2}{\omega\cdot\gamma\cdot\mu}}=\sqrt{\frac{2}{2\cdot\pi\cdot f\cdot\gamma\cdot\mu_0\cdot\mu_r}}=\sqrt{\frac{1}{\pi\cdot f\cdot\gamma\cdot 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot\mu_r}}=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma\cdot 10^{-7}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{f}}\cong\frac{0{,}0628}{\sqrt{f}}$$

Po dosadení dostaneme pre jednotlivé frekvencie tieto hodnoty:

Frekvencia [kHz]	0,05	0,5	10	100	1000	10000
Hĺbka vniku [mm]	8,87	2,81	0,628	0,198	0,0628	0,0198

Pre porovnanie odporu pri určitej a nulovej frekvencii vychádzame z fyzikálneho významu hĺbky vniku pre plochý vodič. V dôsledku skinefektu sa vodič správa tak, akoby prúd pretekal s rovnomerne rozloženou prúdovou hustotou vo vrstve hĺbky vniku *a*. Na valcový vodič to môžeme aplikovať len v prípade, že hĺbka vniku je podstatne menšia ako jeho polomer. Podľa predchádzajúcej tabuľky to môže byť približne splnené pri frekvencii 100 kHz. Pre vyššie frekvencie to platí presnejšie, ak je vyššia frekvencia. Pomer odporov bude rovný prevrátenému pomeru plôch prierezov, ktorými preteká rovnomerne rozložený prúd

$$\frac{R}{R_0}=\frac{S_0}{S}\cong\frac{\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r\cdot a}=\frac{r}{2\cdot a}$$

Hodnoty tohto pomeru uvádza nasledujúca tabuľka, pre frekvenciu 100 kHz je nutné túto hodnotu brať ako hrubý odhad, pretože podmienka $r >> a$ nie je splnená, $r = 5\cdot a$.

Frekvencia [kHz]	100	1000	10000
R/R_0	2,5	8	25

Predchádzajúci vzorec pre pomer odporov počíta plochu medzikružia približne tým, že ju rozvinie na pás a predpokladá, že vznikne obdĺžnik. V skutočnosti je to však kosodĺžnik. Presná plocha medzikružia sa určí takto

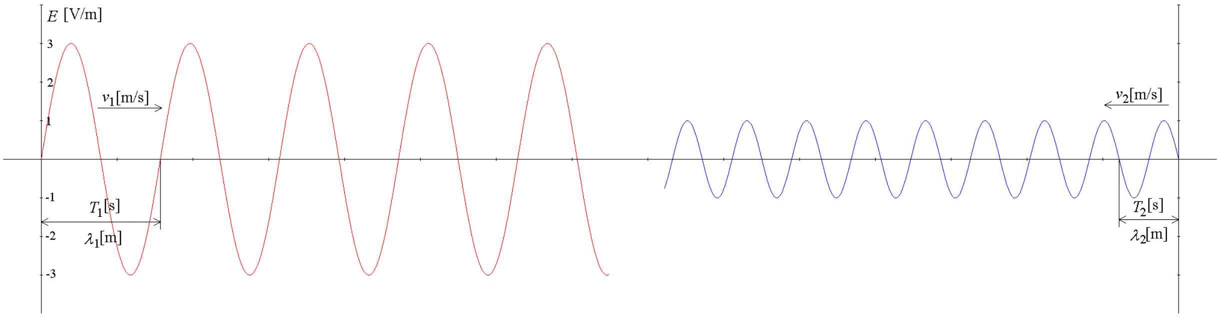
$$S=\pi\cdot\left[r^2-(r-a)^2\right]=\pi\cdot\left[r^2-\left(r^2-2\cdot r\cdot a+a^2\right)\right]=\pi\cdot\left(r^2-r^2+2\cdot r\cdot a-a^2\right)=2\cdot\pi\cdot r\cdot a-\pi\cdot a^2\cong$$
$$\cong 2\cdot\pi\cdot r\cdot a$$

Posledný výraz platí pre $r\cdot a << a^2$, t.j. $r << a$. Počítať s presným prierezom je samozrejme zbytočné, pretože pre polomer porovnateľný s hĺbkou vniku nie je splnená počiatočná podmienka, že prúd preteká s rovnomerne rozloženou prúdovou hustotou len vo vrstve hĺbky vniku *a*.

Príklad 2

Dve vysielacie antény vzdialené od seba 50 km vyslali v rovnakom čase signál. Prostredie medzi jednotlivými vysielačmi je tvorené vzduchom. Frekvencia EM žiarenia prvého vysielača je 900 MHz, druhého 1800 MHz. Maximálna hodnota amplitúdy elektrickej zložky žiarenia prvého vysielača je 3 V/m, druhého 1 V/m. Vypočítajte fázovú konštantu šírenia vlny, fázovú konštantu, merný útlm v danom prostredí, vlnovú dĺžku jednotlivých EM vĺn, rýchlosť šírenia jednotlivých EM vĺn, hĺbku vniku jednotlivých EM vĺn, okamžitú hodnotu intenzity elektrického poľa v čase interferencie vĺn, okamžitú hodnotu intenzity elektrického poľa v čase t = 10^{-6} s, počet periód jednotlivých vĺn v čase interferencie vĺn.

Riešenie:



Konštanta šírenia vlny:

$$k_1 = \omega_1 \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

$$k_1 = 2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 18{,}862 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_2 = \omega_2 \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

$$k_2 = 2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 37{,}725 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

Fázová konštanta a *merný útlm*:

Keďže sa jedná o nevodivé prostredie, v ktorom konduktivita prostredia γ= 0, potom platí:

$$\alpha_1 = k_1 = 18{,}862 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}; \qquad \beta_1 = 0$$

$$\alpha_2 = k_2 = 37{,}725 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}; \qquad \beta_2 = 0$$

Dĺžka periódy jednotlivých vlnení:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{900 \cdot 10^6} = 1{,}111 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{1800 \cdot 10^6} = 5{,}555 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Rýchlosť šírenia sa jednotlivých vĺn:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{\omega_1}{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1}} = c_0 = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{\omega_2}{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1}} = c_0 = 2{,}998 \cdot 10^8 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Vlnová dĺžka:

$$\lambda_1 = v_1 \cdot T_1 = \frac{v_1}{f_1} = \frac{\omega_1}{\alpha_1 \cdot f_1} = \frac{2 \cdot \pi}{\alpha_1} = 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 1{,}111 \cdot 10^{-9} = 0{,}333 \ \mathrm{m}$$

$$\lambda_2 = v_2 \cdot T_2 = \frac{v_2}{f_2} = \frac{\omega_2}{\alpha_2 \cdot f_2} = \frac{2 \cdot \pi}{\alpha_2} = 2{,}998 \cdot 10^8 \cdot 5{,}555 \cdot 10^{-10} = 0{,}167 \ \mathrm{m}$$

Hĺbka vniku jednotlivých vĺn pri daných frekvenciách:
Keďže merný útlm oboch vlnení je v nevodivom prostredí rovný nule, vlna sa neutlmuje:

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega_1 \cdot \gamma \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot 0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}} = \lim \sqrt{\frac{2}{0}} = \infty \ \mathrm{m}$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{2}{\omega_2 \cdot \gamma \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot 0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}} = \lim \sqrt{\frac{2}{0}} = \infty \ \mathrm{m}$$

Čas, kedy dôjde k interferencii vĺn:

$$t_{\mathrm{int}} = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{50 \cdot 10^3}{2{,}998 \cdot 10^8 + 2{,}998 \cdot 10^8} = 8{,}339 \cdot 10^{-5} \ \mathrm{s}$$

Okamžitá hodnota intenzity elektrického poľa v čase interferencie vĺn (presnosť týchto výsledkov je v značnej miere závislá od predchádzajúceho zaokrúhľovania):

$$E_1(t_{\mathrm{int}}) = E_{1\max} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t_{\mathrm{int}}) = E_{1\max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t_{\mathrm{int}}) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot 8{,}339 \cdot 10^{-5}\right) = -1{,}955 \ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

$$E_2(t_{\mathrm{int}}) = E_{2\max} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t_{\mathrm{int}}) = E_{2\max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t_{\mathrm{int}}) = 1 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot 8{,}339 \cdot 10^{-5}\right) = -0{,}989 \ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

Okamžitá hodnotu intenzity elektrického poľa v čase $t_v = 10^{-6}$ s:

$$E_1(t_v) = E_{1\max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t_v) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}\right) = -2{,}896 \ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

$$E_2(t_v) = E_{2\max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t_v) = 1 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}\right) = 0{,}504 \ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$$

Počet periód jednotlivých vĺn v čase interferencie vĺn:

$$n_1 = \frac{t_{\mathrm{int}}}{T_1} = \frac{8{,}339 \cdot 10^{-5}}{1{,}111 \cdot 10^{-9}} = 75059 \qquad \text{alebo} \qquad n_1 = \frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{25000}{0{,}333} = 75075 \ \text{(chyba zaokrúhľovania)}$$

$$n_2 = \frac{t_{\mathrm{int}}}{T_2} = \frac{8{,}339 \cdot 10^{-5}}{5{,}555 \cdot 10^{-10}} = 150117 \qquad \text{alebo} \qquad n_1 = \frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{25000}{0{,}167} = 149701 \ \text{(chyba zaokrúhľovania)}$$