Na zopakovanie:

Teplo je forma ***energie***, ktorú môžeme charakterizovať ako ***interakciu*** medzi ***teplým*** a ***studeným*** telesom alebo ako energiu kmitajúcich molekúl.

Prenos tepla sa uskutočňuje:

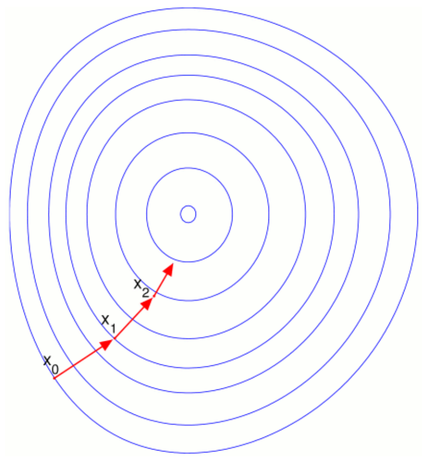
- ***vedením*** (kondukcia)
- ***prúdením*** (konvekcia)
- ***sálaním*** (radiácia)

Vo všeobecnosti sa uskutočňuje kombináciou dvoch alebo viacerých metód prenosu tepla.

Prečo máme vyšetrovať prenos tepla?

V mnohých prípadoch potrebujeme zaistiť ***zvýšenie*** tepelného prenosu (napr. v tepelných výmenníkoch) alebo ***zabrániť*** tepelnému prenosu (napr. zateplenie podkrovného bytu). K riešeniu týchto procesov slúžia procesy šírenia tepla popísané vyššie.

Smer najväčšieho rastu funkcie nám udáva ***gradient*** skalárnej funkcie (má smer aj orientáciu).



Jeho označenie je

$$\mathrm{grad}\,\vartheta = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta n} \cdot \boldsymbol{n}_0 = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \boldsymbol{k} \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{n}_0$ je všeobecný jednotkový vektor ***i***, ***j***, ***k*** sú jednotkové vektory v pravouhlej sústave súradníc. ***Gradient teploty*** je vektorovou veličinou, rovnako ako ***intenzita teplotného poľa*** $\boldsymbol{E}_\vartheta$, pre ktorú platí

$$\boldsymbol{E}_\vartheta = -\,\mathrm{grad}\,\vartheta \qquad (2)$$

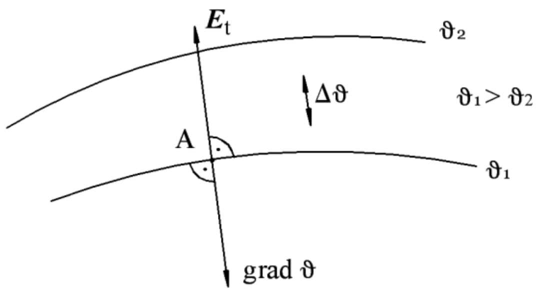
V skalárnom teplotnom poli krivkový integrál intenzity teplotného poľa po ľubovoľnej ***uzavretej krivke*** sa vždy rovná nule, t.j.

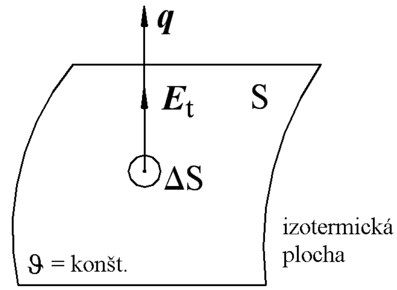
$$\int_l \boldsymbol{E}_\vartheta \cdot \mathrm{d}\,l = \int_l \left(-\,grad\,\vartheta\right) \cdot \mathrm{d}\,l = 0 \qquad (3)$$

Naopak integrál intenzity teplotného poľa len po ľubovoľnej ***časti krivky*** (medzi dvoma bodmi krivky) sa nerovná nule:

$$\int_l \boldsymbol{E}_\vartheta \cdot \mathrm{d}\,l = \int_l \left(-\,grad\,\vartheta\right) \cdot \mathrm{d}\,l = \vartheta_1 - \vartheta_2 = \Delta\vartheta \qquad (4)$$

ale teplotnému rozdielu $\Delta\vartheta$ medzi uvažovanými bodmi. Dôsledkom existujúceho rozdielu $\Delta\vartheta$ je prenos tepla ***v smere intenzity teplotného poľa***, resp. v smere záporného gradientu teploty, teda z vyššej potenciálovej hladiny smerom k nižšej.



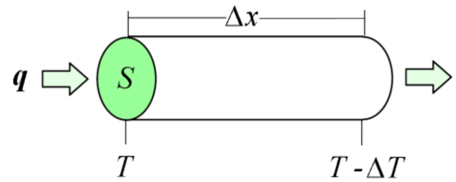


Znázornenie gradientu teploty a hustoty tepelného toku

Prenos tepla vedením (kondukcia)

Fourierov zákon:

Rýchlosť šírenia tepla v tuhom telese je priamoúmerné gradientu teploty a ploche kolmej na smer toku tepla.



Teplotný gradient je rovný

$$\frac{(T-\Delta T)-T}{\Delta x} = -\frac{\Delta T}{\Delta x} \approx -\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5}$$

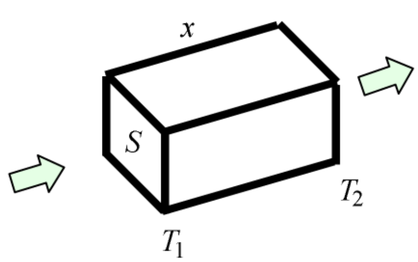
alebo

$$\Phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \tag{6}$$

kde λ je súčiniteľ tepelnej vodivosti [W.m^{-1}.K^{-1}]

Pre ***stacionárne*** 1-rozmerné teplotné pole rovnica (6) prejde na tvar:

$$\Phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{x} \tag{7}$$



Ak rovnicu (7) upravíme, získame rovnicu analogickú ***Ohmovmu zákonu***:

$$T_1 - T_2 = \Phi \cdot \frac{x}{\lambda \cdot S} \tag{8}$$

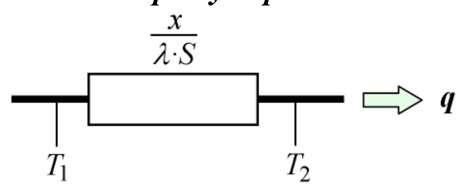
$$U = I \cdot R \tag{9}$$

kde výraz $\frac{x}{\lambda \cdot S}$ môžeme chápať ako tepelný odpor materiálu

$T_1 - T_2$ je tepelný potenciál

Φ je tepelný „prúd“

Symbolom R_ϑ sa zvykne označovať tzv. ***tepelný odpor***.



Ak potrebujeme poznať ako sa mení teplota v rôznych miestach telesa (plochy, na dĺžke), musíme vyšetriť priebeh funkcie teploty podľa jednotlivých súradníc.

Úpravou rovnice (6) získame:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\Phi}{\lambda \cdot S} = -\frac{\Phi'}{\lambda} \tag{10}$$

Pre stacionárny dej je pravá strana rovnice konštantná, preto po zderivovaní rovnice (10) dostávame:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{11}$$

Pozn.: všeobecne:

$$\nabla^2 T = 0 \tag{12}$$

t.j. podmienka vedenia tepla v 1-rozmernom priestore pozostáva z riešenia ***diferenciálnej rovnice 2. rádu***. Je to Laplaceova rovnica, ktorá je matematickým modelom stacionárneho teplotného poľa ***bez vnútorného zdroja***, pretože teplota sa mení len v priestore, nie v čase.

Pre rovinnú dosku:

Vychádzajúc z Laplaceovej rovnice (12) aplikovaním na 1-rozmerné pole získame:

$$-\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{13}$$

Jej následným 2-násobným integrovaním a zavedením hraničných podmienok (v mieste $x = 0$, $T = T_1$ a $x = s$, $T = T_2$) dostaneme lineárnu zmenu funkcie teploty T meniacu pozdĺž jej hrúbky:

$$-\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad / \int (\ ) \mathrm{d}x$$

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = c_1 \qquad / \int (\ ) \mathrm{d}x$$

$$-\lambda \cdot T = c_1 \cdot x + c_2 \qquad / \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$T = -\frac{c_1 \cdot x}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} \qquad \text{/ subst.:} \qquad x = 0,\ T = T_1 \text{ a } x = s,\ T = T_2$$

$x = 0$, $T = T_1$:

$$T_1 = -\frac{c_1 \cdot 0}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} = -\frac{c_2}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = -T_1 \cdot \lambda$$

$x = s$, $T = T_2$:

$$T_2 = -\frac{c_1 \cdot s}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} = -\frac{c_1 \cdot s}{\lambda} - \frac{(-T_1 \cdot \lambda)}{\lambda} = -\frac{c_1 \cdot s}{\lambda} + T_1 \qquad / \cdot \lambda$$

$$T_2 \cdot \lambda = -c_1 \cdot s + T_1 \cdot \lambda \qquad / - (T_1 \cdot \lambda)$$

$$T_2 \cdot \lambda - T_1 \cdot \lambda = -c_1 \cdot s \qquad / \cdot \left(\frac{1}{s}\right)$$

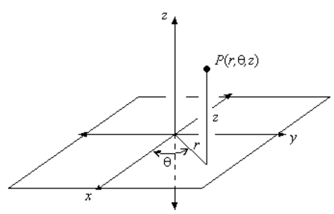
$$c_1 = -\frac{\lambda}{s} \cdot (T_2 - T_1)$$

dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme riešenie teplotnej funkcie pre 1-rozmerné pole (rovinnú dosku):

$$T = -\frac{c_1 \cdot x}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} = -\frac{\left[-\frac{\lambda}{s} \cdot (T_2 - T_1)\right] \cdot x}{\lambda} - \frac{(-T_1 \cdot \lambda)}{\lambda}$$

$$T = (T_2 - T_1) \cdot \frac{x}{s} + T_1$$

Pre valcovú tyč:



Intenzitu prenosu tepla v teplotnom poli hodnotíme veličinami:

1. *Celkovým množstvom preneseného tepla* Q [J]
2. *Tepelným tokom* Φ [W], identickým s tepelným výkonom poľa

$$\Phi = P_\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad (6.6)$$

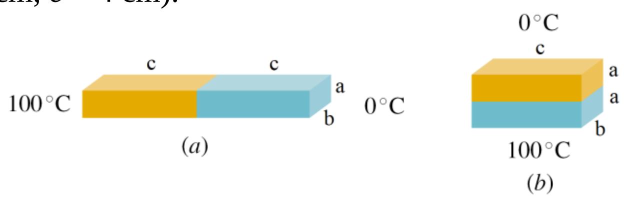
3. *Vektorom hustoty tepelného toku* $\boldsymbol{q}$ [W.m^{-2}]

$$\boldsymbol{q} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}t} \qquad (6.7)$$

Nutnou podmienkou prenosu tepla je nerovnosť grad $\vartheta \neq 0$. Naopak pri rovnosti grad $\vartheta = 0$, prenos tepla v teplotnom poli sa neuskutočňuje, pole je izotermické. Napokon teplotné pole môže byť bezžriedlové alebo žriedlové. V žriedlovom poli existuje vnútorný zdroj tepla, napr. elektrický, ktorý budeme definovať neskôr.

Príklad 1

Dva rovnaké pravouhlé hranoly sú k sebe na koncoch zvarené. Preteká nimi ustálený tok tepla 10 J za dve minúty. Za aký čas by prešlo 10 J rovnakými hranolmi, ale zvarenými k sebe po dĺžke? (a = 1 cm, b = 2 cm, c = 4 cm).



Riešenie:

a) $$\Phi_{\text{za sebou}} = \lambda \cdot S_1 \cdot \frac{\Delta\vartheta}{d_1} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{d_1}{S_1} = \lambda \cdot \Delta\vartheta$$

b) $$\Phi_{\text{po dlzke}} = \lambda \cdot S_2 \cdot \frac{\Delta\vartheta}{d_2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{po dlzke}} \cdot \frac{d_2}{S_2} = \lambda \cdot \Delta\vartheta$$

kde: a) $S_1 = a \cdot b$; $d_1 = 2 \cdot c$

b) $S_2 = b \cdot c$; $d_2 = 2 \cdot a$

$$\Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{d_1}{S_1} = \Phi_{\text{po dlzke}} \cdot \frac{d_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{po dlzke}} = \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{S_2}{S_1} = \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{2 \cdot c}{2 \cdot a} \cdot \frac{b \cdot c}{a \cdot b} = \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{c^2}{a^2}$$

$$\Phi_{\text{po dlzke}} = \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{c^2}{a^2} = \frac{10}{120} \cdot \frac{\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2}{\left(1 \cdot 10^{-2}\right)^2} = \frac{1}{12} \cdot 16 = \frac{4}{3}\ \text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{4}{3}\ \text{W}$$

$$t_{\text{po dlzke}} = \frac{Q}{\Phi_{\text{po dlzke}}} = \frac{10}{\frac{4}{3}} = \frac{30}{4} = 7{,}5\ \text{s}$$

Príklad 2

Vypočítajte tepelný tok dverami, ktoré sú 2 m vysoké a 0,75 m široké.

a) Dvere tvorí panel z hliníka hrúbky 1,5 mm, pokrytý na 75 % panelom zo skla hrubého 3 mm (λ_{Al} = 235 W/(m·K); λ_{sklo} = 1 W/(m·K)).

b) Dvere sú z bielej borovice a sú 2,5 cm hrubé ($\lambda_{\text{borovica}}$ = 0,11 W/(m·K)).

Predpokladajte rozdiel vnútornej a vonkajšej teploty 33 °C. Vplyv zárubne a rámu zanedbajte.

Riešenie:

a)

$$\Phi_{\text{Al}} = \frac{25}{100} \cdot \left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d}\right) = \frac{25}{100} \cdot \left[235 \cdot (2 \cdot 0{,}75) \cdot \frac{33}{1{,}5 \cdot 10^{-3}}\right] = \frac{7755000}{4} = 1938750\ \text{W}$$

$$\Phi_{\text{sklo}} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = \frac{75}{100} \cdot \left[1 \cdot (2 \cdot 0{,}75) \cdot \frac{33}{3 \cdot 10^{-3}}\right] = 12375\ \text{W}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{Al}} + \Phi_{\text{sklo}} = 1938750 + 12375 = 1951125\ \text{W}$$

b) $$\Phi_{\text{borovica}} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 0{,}11 \cdot (2 \cdot 0{,}75) \cdot \frac{33}{2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 217{,}8\ \text{W}$$

Príklad 3

Veľká valcová cisterna na vodu má železné dno s priemerom 1,7 m a hrúbkou steny 5,2 mm. Voda je ohrievaná plynovým horákom tak, že sa udržuje teplotný rozdiel 2,3 °C medzi voľnou hladinou a dnom cisterny. Koľko tepla prejde dnom za 5 minút? (Železo má tepelnú vodivosť 67 W.m^{-1}.K^{-1}.)

Riešenie:

$$\Phi_1 = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 67 \cdot \left[\pi \cdot \left(\frac{1,7}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{2,3}{5,2 \cdot 10^{-3}} = 67264,67 \text{ W}$$

$$Q = \Phi_1 \cdot t = 67264,67 \cdot 5 \cdot 60 = 20179401 \text{ W}$$

Príklad 4

a) Aké sú tepelné straty okna, ak hrúbka skla je 3 mm, vnútorná teplota je 22 °C a vonkajšia –20 °C (λ_{sklo} = 1 W/(m·K))?

b) Vonkajšie okno sa skladá z dvoch sklenených dosiek rovnakej hrúbky. Medzi doskami skla je vzduchová vrstva hrúbky 7,5 mm. Aké budú tepelné straty, ak uvažujeme len straty vedením tepla (λ_{vzduch} = 0,026 W/(m·K)).?

Riešenie:

a) $$q = \frac{\Phi}{S} = \lambda \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 1 \cdot \frac{22 - (-20)}{3 \cdot 10^{-3}} = 14000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) $$q = \frac{\Phi}{S} = \lambda \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{d_{\text{sklo}}}{\lambda_{\text{sklo}}} + \frac{d_{\text{vzduch}}}{\lambda_{\text{vzduch}}} + \frac{d_{\text{sklo}}}{\lambda_{\text{sklo}}}} = \frac{22 - (-20)}{\frac{3 \cdot 10^{-3}}{1} + \frac{7,5 \cdot 10^{-3}}{0,026} + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1}} = 142,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Príklad 5

Priemerná hustota tepelného toku zemským povrchom je 54 mW.m^{-2}. Priemerná tepelná vodivosť skaly je 2,5 W.m^{-1}.K^{-1}. Ak má povrch teplotu 10 °C, aká by mala byť teplota v hĺbke 35 km? (V skutočnosti je teplota spoluvytváraná rozpadom rádioaktívnych prvkov v zemskej kôre. To však zanedbajte.)

Riešenie:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \lambda \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1 = q \cdot \frac{d}{\lambda} + \vartheta_2 = 54 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{35 \cdot 10^3}{2,5} + 10 = 766 \text{ °C}$$

Príklad 6

Tepelná vodivosť skla (Pyrex) je 2,9.10^{-3} cal/(cm.°C.s) pri 0 °C.

a) Preveďte túto hodnotu na jednotky sústavy SI.

b) Aký tepelný odpor R_ϑ sklenenej dosky hrúbky 0,25 palca?

Riešenie:

a) $1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

b) $$R = \frac{l}{\lambda} = \frac{0,25 \cdot (2,54 \cdot 10^{-2})}{1,2} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Príklad 7

a) Vypočítajte tepelný tok oblečenia lyžiara v ustálenom stave, pokiaľ viete, že povrch ľudského tela je približne 1,8 m^2 a vrstva oblečenia je 1 cm hrubá. Povrchová teplota kože človeka je 33 °C, teplota povrchu obleku je 1 °C, tepelná vodivosť oblečenia je 0,04 W/(m.K).

b) Ako sa zmení situácia, keď lyžiar spadne a oblečenie nasiakne vodou s tepelnou vodivosťou 0,6 W.m^{-1}.K^{-1}?

Riešenie:

a) $$\Phi = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 0{,}04 \cdot 1{,}8 \cdot \frac{33-1}{1 \cdot 10^{-2}} = 230{,}4\ \mathrm{J \cdot s^{-1}}$$

b) $$\Phi_{\text{s vodou}} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 0{,}6 \cdot 1{,}8 \cdot \frac{33-1}{1 \cdot 10^{-2}} = 3456\ \mathrm{J \cdot s^{-1}}$$

čo je približne 15-krát viac ako suché oblečenie.

Príklad 8

Valcová medená tyč (λ_{Cu} = 401 W/(m·K)) s dĺžkou 1,2 m a prierezom 4,8 cm^2 je izolovaná proti povrchovým tepelným stratám. Konce tyče udržujeme pri teplotnom rozdiele 100 °C, jeden sa dotýka kusu ľadu a druhý je ponorený vo vriacej vode.

a) Vypočítajte závislosť teploty na vzdialenosti od konca tyče.

b) Ako rýchlo sa bude rozpúšťať ľad?

Pouvažujte, aká fyzikálna jednotka najlepšie popisuje „rýchlosť rozpúšťania ľadu."

Riešenie:

a) $$\Phi = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 401 \cdot \left(4{,}8 \cdot 10^{-4}\right) \cdot \frac{100}{1{,}2} = 16{,}04\ \mathrm{J \cdot s^{-1}}$$

b) $$\left|\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,t}\right| = \frac{\Phi}{L_{\text{topenia}}} = \frac{16\ \mathrm{J \cdot s^{-1}}}{333\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}} = 0{,}048\ \mathrm{g \cdot s^{-1}}$$

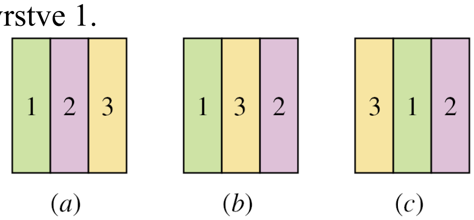
Opisuje ju napr. prietok (rýchlosť toku hmoty).

Príklad 9

Na obrázku sú tri rôzne usporiadania materiálov 1, 2 a 3 tvoriacich stenu. Ich tepelné vodivosti sú $k_1 > k_2 > k_3$. Ľavá strana steny je o 20 °C teplejšia ako pravá. Usporiadajte steny vzostupne podľa:

a) toku energie stenou,

b) teplotného úbytku na vrstve 1.



Riešenie:

a) $\Phi_{(a)} = \Phi_{(b)} = \Phi_{(c)}$

b) $\Delta\vartheta_{1,(c)} > \Delta\vartheta_{1,(a)} = \Delta\vartheta_{1,(b)}$