Generovanie tepla pri elektrickej polarizácii dielektrických materiálov

Dielektrické materiály – ***dielektriká*** – sú elektricky nevodivé materiály. Odlišne od kovov alebo elektrolytov v ideálnom dielektriku sa nenachádzajú voľne pohybujúce náboje (elektróny, ióny, ...), ktoré by vplyvom vonkajšieho elektromagnetického poľa vyvolali vodivostný prúd. Elektrické náboje v dielektrikách sú viazané na jednotlivé atómy a molekuly a nachádzajú sa v rovnovážnom stave. Pôsobením síl vonkajšieho poľa sa však rovnovážny stav mení, vytvárajú sa ***elektrické dipóly***, t.j. sústava rovnako veľkých, ale opačne nabitých elektrických nábojov, pričom ich ťažiská nie sú totožné. Ak je taká asymetria rozdelenia elektrického náboja, napr. v molekule spôsobená len vplyvom vonkajšieho poľa a po jeho odstránení zaniká, elektrické dipóly sú indukované (dočasne). Mierou nesymetrie rozdelenia elektrického náboja v dipóle je ***elektrický dipólový moment***. Je to vektor vyjadrený vzťahom

$$\boldsymbol{p} = q \cdot \boldsymbol{l} \qquad [\mathrm{C.m}] \tag{1}$$

t.j. súčinom náboja dipólu q [C] a vzdialenosťou ťažísk nábojov $\boldsymbol{l}$ (so smerom od záporného ku kladnému). Vzťah platí pre bodové i rozložené náboje (pre súbory molekúl). Väčšie súbory molekúl, ktoré majú zhodne orientované dipólové momenty vytvárajú tzv. ***elektrické domény***. Proces vytvárania elektrických dipólov vplyvom vonkajšieho poľa sa nazýva ***polarizácia dielektrika*** (dielektrická polarizácia). Mierou polarizácie dielektrika a polarizovateľnosti častíc, z ktorých je zložené, je ***permitivita dielektrika*** ε. V izotropnom prostredí je to skalárna veličina, vyjadrujúca vzťah medzi vektormi elektrickej indukcie $\boldsymbol{D}$ a intenzity $\boldsymbol{E}$ poľa

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E} \tag{2}$$

pričom $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r}$ (súčin absolútnej a relatívnej permitivity, $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$, ε_r sa pohybuje v širokých hraniciach, v závislosti od druhu dielektrika, napr. pre vzduch je $\varepsilon_r \cong 1$, pre destilovanú vodu $\varepsilon_\mathrm{r} \cong 80$, pre permitit $\varepsilon_\mathrm{r} \cong 1000$).

Permitivita väčšiny dielektrík nezávisí od elektrickej intenzity poľa (lineárne dielektriká), ale závisí nepriamoúmerne od *frekvencie* striedavého zdroja, vytvárajúceho pole.

Dielektrické materiály, v ktorých sa nenachádza voľný elektrický náboj sú viac-menej ideálne. V reálnych dielektrikách sa vždy nachádza okrem veľkého množstva viazaných vodičov náboja aj malý počet voľných nosičov náboja, ktoré sa vplyvom vonkajšieho poľa pohybujú ako v kove, teda dielektrikum vykazuje určitú vodivosť.

Pohyb nosičov elektrického náboja dielektrika v elektrickom poli je teda rozdielny podľa toho, či nosiče sú voľné alebo viazané. Pohyb voľných nosičov je daný polaritou poľa, po jeho zániku zostávajú v mieste, na ktorom sa práve nachádzajú (nevracajú sa do pôvodnej polohy). Pohyb viazaných nábojov je iný, zodpovedajúci prúd sa prejavuje ako polarizácia dielektrika a jeho veľkosť je priamoúmerná permitivite dielektrika. Po odstránení vplyvu vonkajšieho poľa sa viazané nosiče vracajú do pôvodnej polohy. Pohyb voľných aj viazaných nosičov nábojov v dielektrikách je spoločný tým, že v oboch prípadoch je spojený s premenou energie vonkajšieho budiaceho poľa na teplo, t.j. s ***dielektrickými stratami***. Podľa povahy nosičov nábojov sú teda dielektrické straty dvojaké, vodivostné a polarizačné. Ostatné môžu byť rôzne. Ak viazané elektrické náboje pri svojom pohybe sledujú zmeny striedavého poľa bez oneskorenia (brzdenia prostredím), ich pohyb je bezstratový, polarizačné dielektrické straty sa rovnajú nule. Ak sa však pohyb týchto nábojov oneskoruje za zmenami poľa (intenzitou **E**), dochádza k javu *elektrickej hysterézie*, či už v dôsledku ich zotrvačnosti spôsobenej ich hmotnosťou alebo v dôsledku odporu prostredia, v ktorom sa pohybujú. Polarizácia dielektrika je sprevádzaná s polarizačnými dielektrickými stratami (relaxačnými). Z pohľadu premeny elektrickej energie na užitočné teplo sú v tuhých dielektrikách polarizačné straty najdôležitejšie.

Z určitej analógie medzi magnetickou a elektrickou polarizáciou, resp. hysteréziou dá sa rovnakým postupom vyjadriť energetická bilancia premeny energie poľa na teplo generované v dielektriku. Pohltená energia elektromagnetického poľa na jednotku objemu dielektrika sa potom dá napísať rovnicou:

$$w_\mathrm{e} = \int_{-D_\mathrm{max}}^{+D_\mathrm{max}} E \cdot \mathrm{d}D + \int_{+D_\mathrm{max}}^{-D_\mathrm{max}} E \cdot \mathrm{d}D \qquad [\mathrm{J.m^{-3}}] \tag{3}$$

Vyjadruje hustotu energie pohltenej dielektrikom z energie striedavého elektromagnetického poľa za dobu jednej periódy. Pohltená energia zvyšuje potenciálnu energiu dipólov, teplota dielektrika stúpa. Tento spôsob ohrevu sa nazýva ***dielektrický ohrev***. Má charakter priameho elektrického ohrevu, s rovnomernosťou, závislou od rozloženia fázora elektrickej intenzity poľa **E** v objeme dielektrika.

Tento princíp generovania tepla sa tiež využíva pri ***mikrovlnovom ohreve***. Je rovnako založený na vzniku tepla v ohrievanom materiáli prostredníctvom dielektrických strát, ktoré sú rovnako spôsobené pôsobením striedavého elektromagnetického poľa. Rozdiel je v pracovných frekvenciách, ktoré pri mikrovlnovom ohreve sa pohybujú rádovo v GHz. Zdrojom potrebného elektromagnetického vlnenia s vlastnosťami koherentného žiarenia, sú kvantové generátory, tzv. MASERY (**m**icrowave **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation).

Rovnice elektromagnetického vlnenia a ich riešenie pre valcové nevodivé prostredie

Vlnové rovnice pre nevodivé prostredie, ktoré vyjadrujú šírenie elektromagnetického vlnenia v prostredí definovanom konduktivitou γ, permeabilitou μ a permitivitou ε, podobne ako pri indukčnom ohreve, je možné napísať v tvare

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{H}} + k^2 \cdot \underline{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{4}$$

$$\nabla^2 \underline{\boldsymbol{E}} + k^2 \cdot \underline{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{5}$$

so všeobecným riešením

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{C}_1 \cdot J_0(k \cdot r) + \boldsymbol{C}_2 \cdot N_0(k \cdot r) \tag{6}$$

$$\underline{\boldsymbol{H}} = j \cdot \frac{k}{\omega \cdot \mu} \cdot \left[\boldsymbol{C}_1 \cdot J_1(k \cdot r) + \boldsymbol{C}_2 \cdot N_1(k \cdot r)\right] \tag{7}$$

kde $\underline{\boldsymbol{H}}$ je fázor magnetickej zložky vlnenia
$\underline{\boldsymbol{E}}$ je fázor elektrickej zložky vlnenia
k je konštanta šírenia vlnenia
J_0, J_1 Besselove cylindrické funkcie prvého druhu, nultého, resp. prvého rádu
N_0, N_1 Neumannove cylindrické funkcie druhého druhu, nultého, resp. prvého rádu

Na rozdiel od vodivého prostredia ($\gamma >> \omega \cdot \varepsilon$), konštantu šírenia elektromagnetického vlnenia nemôžeme zjednodušiť, ale ju uplatňujeme v plnom rozsahu, t.j.

$$k^2 = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \tag{8}$$

resp.

$$k = \sqrt{-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \tag{9}$$

Ak pre stanovenie integračných konštánt $\boldsymbol{C}_1$ a $\boldsymbol{C}_2$ vo všeobecných riešeniach určíme hraničné podmienky zodpovedajúce valcovému tvaru dielektrika, dostaneme jednoznačné riešenia:

- pre elektrickú zložku

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \underline{\boldsymbol{E}}_0 \cdot J_0(k \cdot r) \qquad [\mathrm{V.m^{-1}}] \tag{10}$$

- pre magnetickú zložku

$$\underline{\boldsymbol{H}} = j \cdot \frac{k}{\omega \cdot \mu} \cdot \underline{\boldsymbol{E}}_0 \cdot J_1(k \cdot r) \qquad [\mathrm{A.m^{-1}}] \tag{11}$$

kde $\underline{\boldsymbol{E}}_0$ je fázor intenzity elektrického poľa v osi valca (r = 0), daný pomerom maximálnej hodnoty napätia na doskách kondenzátora a ich vzdialenosti (hrúbky dielektrika)

$$E_0 = \frac{U_{\max}}{h} \qquad [\mathrm{V.m^{-1}}] \tag{12}$$

Dielektrický valec s malými stratami

Do kategórie týchto dielektrík zaraďujeme materiály, ktorých relatívna permitivita sa pohybuje v hraniciach 2 až 7 a stratový uhol v hraniciach 0,01 až 0,08. Na týchto materiáloch je možné prakticky uplatňovať dielektrický ohrev.

Pre takéto materiály s malými stratami je možné upraviť konštantu šírenia na tvar

$$k^2 = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon} + 1 \right) = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \left(1 - j \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} \right) =$$

$$= \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \cdot \left(1 - j \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} \right) \tag{13}$$

kde druhý člen v zátvorke nazývame ***stratový uhol dielektrika***

$$\mathrm{tg}\, \delta = \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} << 1 \tag{14}$$

Pretože je blízky nule, približne platí

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \tag{15}$$

t.j.

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\lambda \cdot f} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \qquad [\mathrm{rad.m^{-1}}] \tag{16}$$

Potom všeobecne komplexný argument Besselových cylindrických funkcií v riešeniach (6) a (7) je reálne číslo

$$(k \cdot r) = x = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot r = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot r \qquad [\text{-}] \qquad (17)$$

t.j. zložky fázorov elektromagnetického vlnenia (10) a (11) sú

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \underline{\boldsymbol{E}}_0 \cdot J_0(x) \qquad [\text{V.m}^{-1}] \qquad (18)$$

$$\underline{\boldsymbol{H}} = j \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \underline{\boldsymbol{E}}_0 \cdot J_1(x) \qquad [\text{A.m}^{-1}] \qquad (19)$$

V reálnych aplikáciách dielektrického ohrevu je argument x veľmi malý, blízky nule. Pre $x \to \infty$ sú funkcie $J_0(x) \cong 1$; $J_1(x) \cong \frac{x}{2}$, teda nakoniec

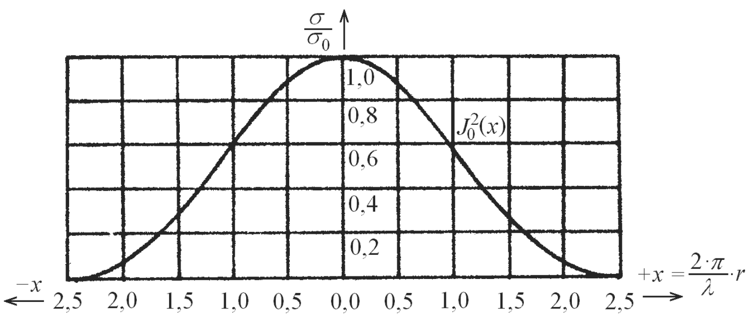
$$\underline{\boldsymbol{E}} = \underline{\boldsymbol{E}}_0 \qquad [\text{V.m}^{-1}] \qquad (20)$$

$$\underline{\boldsymbol{H}} = j \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \underline{\boldsymbol{E}}_0 \cdot \frac{x}{2} \qquad [\text{A.m}^{-1}] \qquad (21)$$

Z rovníc (20) a (21) vyplýva, že pri veľmi malom argumente x elektrické pole v dielektriku je homogénne, magnetické pole lineárne rastie s argumentom x.

Merný a celkový generovaný výkon v dielektriku

Zodpovedá materiálovým konštantám a priebehu Besselovej funkcie $J_0^2(x)$.



Obr. 1 Priebeh Besselovej funkcie $J_0^2(x)$

V osi valcového dielektrika (r = 0) sa generuje merný výkon

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 \qquad [\text{W.m}^{-3}] \qquad (22)$$

Potom na ľubovoľnom polomere r vyjadrenom cez argument $x = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\lambda}$ je zodpovedajúci merný výkon

$$\sigma(x) = \sigma_0 \cdot J_0^2(x) \qquad (23)$$

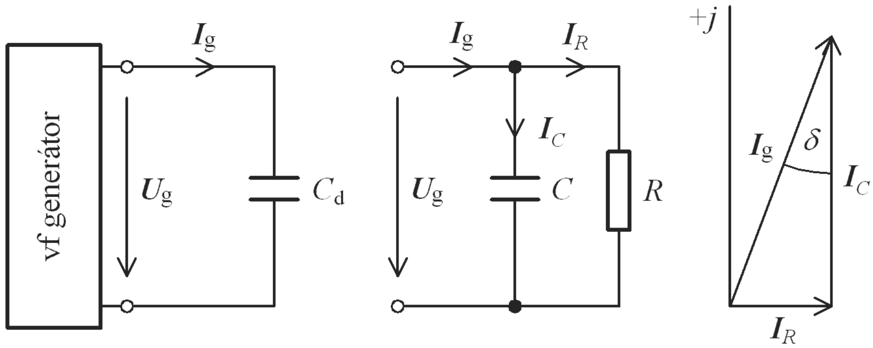
Znova, pre reálne prípady dielektrického ohrevu, x je blízke nule, t.j. $J_0^2(x) \cong 1$, teda

$$\sigma(x) = \sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 = \text{konšt.} \qquad (24)$$

Z posledného výrazu vyplýva, že merný výkon v dielektriku sa generuje rovnomerne. Celkový výkon generovaný v dielektriku s polomerom r_1 a hrúbke h bude

$$P = \sigma_0 \cdot V = \sigma_0 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h \qquad [\text{W}] \qquad (25)$$

Principiálna a náhradná elektrická schéma dielektrického ohrevu



Obr. 2 a) principiálna schéma b) náhradná schéma c) fázorový diagram dielektrického ohrevu

Z pripojeného fázorového diagramu prúdov náhradnej schémy (Obr. 2 c)) vyplýva

$$\mathrm{tg}\ \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{\frac{U_g}{R}}{U_g \cdot X_C} = \frac{1}{R \cdot \omega \cdot C} \qquad [\text{ - }] \tag{26}$$

Porovnaním výrazov (14) a (26) dostaneme konduktivitu dielektrika

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{R \cdot C} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}{R \cdot C} \qquad [\mathrm{S.m^{-1}}] \tag{27}$$

kde $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$ je permitivita vákua.

Náhradný odpor dielektrika R (Obr. 2 b))

$$R = \rho \cdot \frac{h}{S} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{h}{S} = \frac{U_g^2}{P} \qquad [\Omega] \tag{28}$$

na ktorom sa indukuje celkový výkon v dielektriku

$$P = \frac{U_g^2}{R} = U_g \cdot I_R = U_g \cdot I_C \cdot \mathrm{tg}\ \delta = U_g^2 \cdot \omega \cdot C \cdot \mathrm{tg}\ \delta \quad [\mathrm{W}] \tag{29}$$

kde U_g je efektívna hodnota napätia zdroja; $U_g = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ [V]

pričom kapacita kondenzátora je

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{h} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{h} \qquad [\mathrm{F}] \tag{30}$$

s plošným obsahom kruhovej dosky (elektródy) $S = \pi \cdot r_1^2$ a vzdialenosťou medzi doskami kondenzátora h (hrúbka dielektrika).

Celkový výkon indukovaný v ohrievanom materiáli môžeme teda vypočítať dvoma spôsobmi. Riešením náhradnej schémy dielektrického ohrievacieho zariadenia, podľa vzťahu (29) alebo riešením elektrického poľa v dielektriku podľa vzťahu (25).

Príklad 1

Vypočítajte argument x, konduktivitu dielektrika γ, merný výkon generovaný v dielektriku σ_0, celkový výkon generovaný v dielektriku P a náhradný odpor dielektrika R, ak poznáme:

- relatívnu permitivitu dielektrika $\varepsilon_\mathrm{r} = 4$
- stratový uhol dielektrika $\mathrm{tg}\ \delta = 0{,}05$
- hrúbku dielektrika $h = 8$ cm
- polomer valcového dielektrika $r_1 = 10$ cm
- maximálne napätie zdroja $U_\mathrm{max} = 10$ kV
- frekvenciu napájacieho zdroja $f = 20 \cdot 10^6$ Hz

Riešenie:

Argument x vlnenia v dielektriku:

$$x = k \cdot r = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_\mathrm{r}} \cdot r$$

$$x = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 4} \cdot 0{,}1 = 0{,}08383$$

Z výsledku vyplýva, že argument x je podstatne menší ako 1, teda elektrické pole v dielektriku je približne homogénne.

Konduktivita dielektrika:

$$\gamma = \omega \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{tg}\ \delta = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \mathrm{tg}\ \delta$$

$$\gamma = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 0{,}05 = 2{,}2253 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$$

Merný generovaný výkon v dielektriku:

$$\sigma(x) = \sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{U_\mathrm{max}}{h}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}2253 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{10000}{0{,}08}\right)^2 = 1738478{,}8\ \mathrm{W \cdot m^{-3}}$$

Takýto merný výkon by sa generoval v ideálne homogénnom dielektriku. Vplyv reálnej nehomogenity poľa spôsobí zmenšenie merného výkonu cca o 1 až 5 %.

Celkový výkon indukovaný v dielektriku:

$$P = \sigma_0 \cdot V = \sigma_0 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h = 1738478{,}8 \cdot \pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}08 = 4369{,}3\ \mathrm{W}$$

Náhradný odpor dielektrika:

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{h}{S} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{h}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{1}{2{,}2253 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{0{,}08}{\pi \cdot 0{,}1^2} = 11443{,}5\ \Omega$$

alebo

$$R = \frac{U_\mathrm{g}^2}{P} = \frac{\left(\frac{U_\mathrm{max}}{\sqrt{2}}\right)^2}{P} = \frac{\left(\frac{10000}{\sqrt{2}}\right)^2}{4369{,}3} = 11443{,}5\ \Omega$$

Príklad 2

Určite stratový uhol dielektrika, ak napájacia frekvencia zdroja je 20 MHz, relatívna permitivita 6, polomer prehrievaného materiálu 10 cm, jeho hrúbka 6 cm, maximálne napätie zdroja je 8 kV a v dielektriku sa generuje celkový výkon 3500 W.

Riešenie:

$$\mathrm{tg}\ \delta = \frac{1}{R\cdot\omega\cdot C} = \frac{1}{\dfrac{U_\mathrm{g}^2}{P}\cdot\omega\cdot\varepsilon\cdot\dfrac{S}{h}} = \frac{1}{\dfrac{\left(\dfrac{U_\mathrm{max}}{\sqrt{2}}\right)^2}{P}\cdot\omega\cdot\varepsilon\cdot\dfrac{S}{h}} = \frac{2\cdot h\cdot P}{U_\mathrm{max}^2\cdot\omega\cdot\varepsilon\cdot S}$$

$$\mathrm{tg}\ \delta = \frac{2\cdot h\cdot P}{U_\mathrm{max}^2\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_\mathrm{r}\cdot\pi\cdot r_1^2} = \frac{h\cdot P}{U_\mathrm{max}^2\cdot\pi^2\cdot f\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_\mathrm{r}\cdot r_1^2}$$

$$\mathrm{tg}\ \delta = \frac{0{,}06\cdot 3500}{8000^2\cdot\pi^2\cdot 20\cdot 10^6\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 0{,}1^2} = 0{,}0313$$

Príklad 3

Určite, aký má byť polomer dielektrika s relatívnou permitivitou $\varepsilon_\mathrm{r} = 4$, pri ktorom môžeme elektrické pole v ňom považovať za homogénne, ak je ohrievaný kondenzátor pripojený na zdroj napätia s frekvenciou 27,12 MHz. Predpokladajte $x < \frac{\pi}{10}$.

Riešenie:

$$x = k\cdot r \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{x}{k} = \frac{x}{\omega\cdot\sqrt{\mu\cdot\varepsilon}} = \frac{x\cdot\lambda}{2\cdot\pi}$$

$$r < \frac{x}{k} = \frac{x}{\omega\cdot\sqrt{\mu\cdot\varepsilon}} = \frac{x}{2\cdot\pi\cdot f\cdot\sqrt{\mu_0\cdot\mu_\mathrm{r}\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_\mathrm{r}}}$$

$$r < \frac{\dfrac{\pi}{10}}{2\cdot\pi\cdot 27{,}12\cdot 10^6\cdot\sqrt{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 4}} = 0{,}27636\ \mathrm{m}$$