

**Technická univerzita v Košiciach**  
**Fakulta elektrotechniky a informatiky**  
Katedra elektroenergetiky

# **Premeny elektrickej energie**

**Zbierka príkladov I**

**Dušan Medved'**

**2014**

# **Premeny elektrickej energie – Zbierka príkladov I**

Autor:           Ing. Dušan Medved', PhD.

Lektorovali:   Ing. Jaroslav Džmura, PhD.  
                  Ing. Martin Kanálik, PhD.

© 2014, Ing. Dušan Medved', PhD.

Vydal: Technická univerzita v Košiciach

ISBN 978-80-553-1803-5



## Obsah

Obsah.....	3
1 Termokinetika .....	5
2 Fourierov zákon.....	12
3 Stefanov-Boltzmannov zákon .....	19
4 Elektromagnetické pole v nevodivom prostredí.....	24
5 Elektromagnetické pole vo vodivom prostredí .....	32
6 Asynchrónny motor.....	37
7 Premena elektrickej energie na chemickú energiu .....	45
8 Výpočet elektrickej špirály.....	56
9 Výpočet indukovaného tepla.....	76
10 Generované teplo v dielektrikách.....	79
Použitá a odporúčaná literatúra .....	87



# 1 TERMOKINETIKA

**Teplota** je jednou zo základných veličín sústavy jednotiek SI. Teplota je stavová veličina látky. Opisuje strednú kinetickú energiu častíc. Teplota sa označuje  $T$  a jej jednotkou podľa SI je Kelvin. V bežnom živote sa však z praktických dôvodov častejšie používa stupeň Celzia alebo stupeň Fahrenheita. Meriame ju **priamo** (teplomermom: plynový teplomer, kvapalinový teplomer, bimetalický teplomer, termočlánkom, termistorom (rezistor, ktorého rezistivita sa vplyvom teploty mení)) alebo **nepriamo** (pyrometrom, termografom).

**Nultá termodynamická veta** alebo **nultý termodynamický zákon** je termodynamická veta, ktorá hovorí, že keď dve telesá sú v rovnovážnom stave a zostanú v ňom dovtedy, kým si môžu začať vymieňať teplo, potom sú vzájomne takisto v rovnovážnom stave.

**Tepelná rozťažnosť** (niekedy tiež **teplotná rozťažnosť**) je jav, pri ktorom sa hodnota meranej veličiny  $X$  zmení po dodaní tepla určitej látke (po zahriatí o určitú teplotu). Obyčajne je uvažovaná priama úmernosť medzi zmenou veličiny  $\Delta X$  a zmenou teploty  $\Delta T$ . Inak povedané, hodnota  $X$  je lineárna funkcia teploty  $T$ .

$$\Delta X = X_0 \cdot k \cdot \Delta T$$

$X_0$  predstavuje počiatočnú hodnotu veličiny  $X$  pred zmenou teploty,  $k$  je koeficient teplotnej rozťažnosti, ktorý býva udávaný v jednotkách  $[1/K]$  alebo  $[1/^\circ C]$ .

### Dĺžková teplotná rozťažnosť

$$\Delta d = d_0 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta \quad \text{alebo} \quad \Delta d = d_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad [m]$$

kde  $\alpha$  je teplotný súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti  $[1/^\circ C]$

### Objemová teplotná rozťažnosť

$$\Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta \vartheta \quad \text{alebo} \quad \Delta V = V_0 \cdot \beta \cdot \Delta T \quad [m^3]$$

kde  $\beta$  je teplotný súčiniteľ objemovej rozťažnosti  $[1/^\circ C]$  ( $\beta = 3 \cdot \alpha$ )

**Teplo** je časť vnútornej energie, ktorú teleso prijme alebo odovzdá pri tepelnej výmene druhému telesu. Je treba rozlišovať dve rôzne veličiny: **teplota**, ktorá vyjadruje stav telesa, a **teplo**, ktoré vyjadruje zmenu stavu telesa. V sústave jednotiek SI ho meriame v **jouloch** [J]. Ďalšie jednotky sú napr. **kalória** [cal] alebo **Britská teplotná jednotka** [Btu], kde:

$$1 \text{ cal} = 3,969 \cdot 10^{-3} \text{ Btu} = 4,186 \text{ J}$$

**Tepelná kapacita**, alebo **mólová tepelná kapacita** je schopnosť telesa prijať energiu v podobe tepla. Označuje sa veľkým písmenom  $C$ . Tepelná kapacita je definovaná ako množstvo tepla v jouloch, ktoré treba telesu dodať, aby sa jeho teplota zvýšila o 1 K (Kelvin), prípadne o 1  $^\circ C$  (stupeň Celzia). Vo fyzike a termodynamike sa ako jednotka teploty používa prednostne Kelvin.

$$C = \frac{\partial Q}{\partial T} \quad [J \cdot K^{-1}] \quad \text{alebo} \quad C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta T} \quad [J \cdot K^{-1}]$$

Častejšie sa v tabuľkách uvádza **merná tepelná kapacita**, ktorá sa vzťahuje na jednotku hmotnosti. Označuje sa malým písmenom  $c$ . Jej jednotkou je  $[J/(kg \cdot K)]$ , prípadne  $[kJ/(kg \cdot K)]$ .

Platí:

$$c = \frac{C}{m} \quad [\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$$

kde  $m$  je hmotnosť látky [kg]

Teplu dodané telesu zvýši jeho teplotu o  $\vartheta_2 - \vartheta_1$ . Túto súvislosť vyjadrujeme vzťahom:

$$Q = C \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad [\text{J}]$$

kde  $C$  je tepelná kapacita telesa

Ak má teleso hmotnosť  $m$ , potom platí

$$Q = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad [\text{J}]$$

kde  $c$  je merná tepelná kapacita materiálu, z ktorého je teleso vyrobené [J/(kg·K)]

*Otázka:*

Určité množstvo tepla  $Q$  ohreje 1 g materiálu A o 3 °C a 1 g materiálu B o 4 °C. Ktorý z materiálov má väčšiu mernú tepelnú kapacitu?

Teplu na jednotku hmotnosti, ktoré dodáme materiálu, potrebné pre zmenu jeho skupenstva sa nazýva **skupenské**, prípadne **latentné teplo**  $L$ . Platí

$$Q = L \cdot m$$

Najčastejšie sa stretávame so **skupenským teplom vyparovania**, resp. **kondenzácie**, čo je množstvo energie na jednotku hmotnosti, ktoré musíme dodať, resp. odobrať, aby sme premenili kvapalinu na plyn, resp. plyn na kvapalinu. Skupenské teplo vyparovania pri teplote varu kvapaliny nazývame **skupenské teplo varu**. **Skupenské teplo topenia**, resp. **tuhnutia** je množstvo energie na jednotku hmotnosti, ktoré musíme dodať, aby sme roztavili pevnú látku, resp. ktoré musíme odobrať, aby kvapalina stuhla.

**Prvá termodynamická veta** alebo prvý termodynamický zákon je vo fyzike nasledujúci zákon:

*formulácia 1:* Každá fyzikálna sústava má stavovú veličinu nazývanú vnútorná energia ( $U$ ), ktorá sa mení len prostredníctvom výmeny energie s okolím (objemová práca, tepelná výmena)

$$\text{formulácia 2: } \Delta U = \Delta Q - \Delta(W_p + W_k) = \Delta Q - \Delta W \quad [\text{J}]$$

kde  $\Delta U$  zmena vnútornej energie sústavy

$\Delta Q$  zmena tepla sústavy (+ znamená dodanie, – znamená odobratie)

$\Delta(W_p + W_k)$  vykonaná/spotrebovaná objemová práca (+ znamená, že ju sústava vykonala, – znamená, že ju sústava spotrebovala)

*formulácia 3:* Nie je možné skonštruovať **perpetuum mobile prvého druhu** (teda stroj, ktorý vyrába energiu z ničoho)

### **Aplikácia prvého termodynamického zákona**

Prvý zákon termodynamiky môžeme aplikovať na deje prebiehajúce v uzavretých sústavách. **Zavedieme dohodu:** Objemovú prácu  $W$  budeme označovať súhrnne, nie ako rozdiel spotrebovanej a vykonanej práce. O tom, o akú prácu ide, rozhoduje jej znamienko:

$W > 0$  práca bola sústavou spotrebovaná (resp. jej bola dodaná)

$W < 0$  prácu vykonala sústava

Prvý zákon termodynamiky je možné použiť aj v nasledujúcich špeciálnych prípadoch:

<i>Adiabatický dej</i>	$Q = 0:$	$Q = 0, \Delta U = -W,$
<i>Izochorický dej</i>	$\Delta V = 0:$	$W = 0, \Delta U = Q,$
<i>Izotermický dej</i>	$T = \text{konšt.}:$	$\Delta U = 0, Q = -W,$
<i>Izobarický dej</i>	$p = \text{konšt.}:$	$\Delta U = Q + W \quad (W = -p \cdot \Delta V, Q = \Delta U - W)$

**Prenos tepla**

Výkon  $\Phi$ , ktorým sa teplo prenáša **vedením** cez dosku, ktorej steny sú udržiavané pri teplotách  $\vartheta_2$  a  $\vartheta_1$ , je

$$\Phi = \frac{Q}{t} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{d} \quad [\text{W}] \quad \text{resp.} \quad \Phi = \frac{Q}{t} = \lambda \cdot S \cdot \frac{T_2 - T_1}{d} \quad [\text{W}]$$

kde  $S$  plocha dosky [ $\text{m}^2$ ]  
 $d$  hrúbka dosky [ $\text{m}$ ]  
 $\lambda$  súčiniteľ tepelnej vodivosti materiálu dosky [ $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ]

K **prúdeniu** dochádza, pokiaľ teplotný rozdiel spôsobí prenos tepla pohybom kvapaliny. **Žiarenie** je prenos tepla vyžarovaním elektromagnetickej energie. Výkon  $\Phi_r$ , ktorým teleso vyžaruje energiu prostredníctvom tepelného žiarenia, je rovný

$$\Phi_r = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot T^4 \quad [\text{W}]$$

kde  $\sigma$  je Stefan-Boltzmannova konštanta;  $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$   
 $\varepsilon$  je emisivita povrchu predmetu [ - ]  
 $S$  je povrch predmetu [ $\text{m}^2$ ]  
 $T$  je povrchová teplota predmetu [ $\text{K}$ ]

Výkon  $\Phi_a$ , ktorým teleso pohlcuje energiu tepelného žiarenia zo svojho okolia, je pri konštantnej teplote okolia  $T_0$  [ $\text{K}$ ] rovný

$$\Phi_a = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot T_0^4 \quad [\text{W}]$$

**Príklad 1**

Materiály A, B a C sú pevné látky pri teplote topenia. Materiál A potrebuje 200 J pre roztavenie 4 kg. Materiál B potrebuje 300 J pre roztavenie 5 kg a materiál C potrebuje 300 J pre roztavenie 6 kg. Usporiadajte ich zostupne podľa ich merných skupenských tepiel topenia.

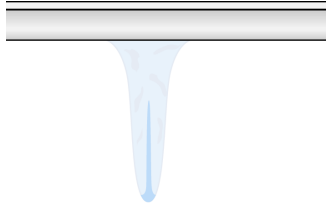
**Príklad 2**

Keď cencúľ rastie, je jeho vonkajší povrch pokrytý tenkou vrstvou tekutej vody, ktorá pozvoľne steká dole, aby vytvorila kvapku visiacu na špičke. Každá kvapka vytvára tenkú trubičku kvapalnej vody, ktorá sa rozširuje smerom nahor po cencúli k jeho koreni (hore). Pretože voda na špičke tejto trubičky neustále tuhne, uvoľňuje sa energia. Odvádza sa táto energia radiálne ľadom von, dole vodou do visiacej kvapky alebo nahor do koreňa? (Predpokladajme, že teplota vzduchu je pod  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ .)



Riešenie:

Nahor (pri kvapalnej vode vo vnútri a zospodu je  $\Delta \vartheta = 0$  horizontálne aj dole).



**Príklad 3**

Sklenené okno má pri teplote 10 °C rozmer presne 20 cm × 30 cm. O koľko vzrastie jeho plocha pri teplote 40 °C?

Riešenie:

$$\Delta S = S \cdot (2 \cdot \alpha) \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot (2 \cdot 9 \cdot 10^{-6}) \cdot (40 - 10) = 3,24 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

**Príklad 4**

Hodiny s mosadzným kyvadlom idú presne pri 20 °C. Vypočítajte sekundový rozdiel, ktorý vznikne za hodinu pri teplote 0 °C.

**Príklad 5**

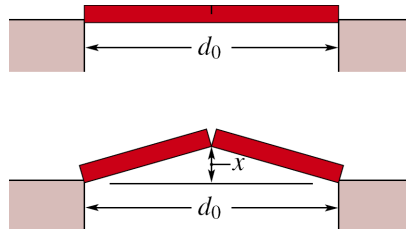
Aký je objem olovenej gule pri 30 °C, ak je jej objem pri 60 °C rovný 50 cm<sup>3</sup>?

Riešenie:

$$V = V_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta \vartheta) = V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta) = (50 \text{ cm}^3) \cdot [1 + 3 \cdot (29 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}) \cdot (30 ^\circ\text{C} - 60 ^\circ\text{C})] = 49,87 \text{ cm}^3$$

**Príklad 6**

Tyč s puklinou je upevnená vo zveráku puklinou smerom nahor. Pri zahriatí o 32 °C sa zdvihne o  $x$ . Vypočítajte  $x$ , ak je dĺžka tyče  $d_0 = 3,77 \text{ m}$  a súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti je  $25 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ .



Riešenie:

Uvažujme polovicu tyče. Jej polovičná dĺžka je  $l_0 = d_0 / 2$  a jej dĺžka po vzraste teploty je  $l = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta \vartheta$ . Pôvodná dĺžka pol-tyče  $l_0$ , jej nová dĺžka  $l$  a vzdialenosť  $x$  tvoria pravouhlý trojuholník. Využitím Pytagorovej vety dostaneme:  $x = l^2 - l_0^2 = l_0^2 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta)^2 - l_0^2$ . Po vyjadrení členov výrazu  $(1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta)^2$  zistíme, že výraz  $(\alpha \cdot \Delta \vartheta)^2$  je oproti členom  $1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta$  je malý a môžeme ho zanedbať. Potom dostávame

$$x^2 = l_0^2 + 2 \cdot l_0^2 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta - l_0^2 = 2 \cdot l_0^2 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta$$

a

$$x = l_0 \cdot \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot \Delta \vartheta} = \frac{3,77 \text{ m}}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (25 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}) \cdot (32 ^\circ\text{C})} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

**Príklad 7**

Jeden dietológ odporúča svojim pacientom, ktorí chcú schudnúť, aby pili ľadovú vodu. Jeho teória je založená na tom, že telo musí spáliť značné množstvo energie k ohriatiu vody (0 °C) na telesnú teplotu (37 °C). Koľko litrov ľadovej vody je potrebné k spáleniu 454 g tuku? Pri spálení tohto množstva tuku vytvorí telo 3500 kcal. Prečo nie je dobré nasledovať jeho rady?

Riešenie:

$$Q_{\text{tuk}} = 3500 \cdot 10^3 \text{ cal} \cdot 4,186 = 1,4651 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$Q_{\text{voda}} = Q_{\text{tuk}} = m_{\text{voda}} \cdot c_{\text{voda}} \cdot \Delta \vartheta$$

Odkiaľ dostávame:

$$m_{\text{voda}} = \frac{Q_{\text{tuk}}}{c \cdot \Delta \vartheta} = \frac{1,4651 \cdot 10^7}{4186 \cdot 37} = 94,59 \text{ kg}.$$

**Príklad 8**

Miestnosť je osvetlená štyrmi 100-Wattovými žiarovkami. (100 W je príkon elektrickej energie; tá sa premení na teplo a svetlo.) 90 % energie sa premení na teplo. Koľko tepla sa vyžiarí do miestnosti za jednu hodinu?

**Príklad 9** (Pokračovanie príkladu 8)

Energetický príjem atléta je 4000 kcal denne. Keby uvoľňoval energiu plynule po celý deň, ako by dopadlo porovnanie jeho energetického výdaja so 100-Wattovou žiarovkou?

**Príklad 10**

Merná tepelná kapacita látky sa mení s teplotou podľa vzťahu:  $c = 0,2 + 0,14 \cdot \vartheta + 0,023 \cdot \vartheta^2$ . (Teplota je v stupňoch Celzia a  $c$  je v cal/(g·K).) Vypočítajte teplo, ktoré je potrebné k zahriatiu 2 g látky z teploty 5 °C na 15 °C?

Riešenie:

$$Q = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} c \cdot m \cdot d\vartheta = m \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} c \cdot d\vartheta = 2 \cdot \int_{5^\circ\text{C}}^{15^\circ\text{C}} (0,2 + 0,14 \cdot \vartheta + 0,023 \cdot \vartheta^2) \cdot d\vartheta =$$

$$= 2 \cdot [0,2 \cdot \vartheta + 0,07 \cdot \vartheta^2 + 0,00767 \cdot \vartheta^3]_5^{15} \text{ cal} = 82 \text{ cal}$$

**Príklad 11**

Kuchárovi sa pokazila pec. Rozhodol sa preto uvariť vodu na kávu tak, že bude trepať termoskou s vodou. Predpokladajme, že v termoske je 500 cm<sup>3</sup> vody o teplote 20 °C. Pri každom otočení spadne voda z výšky 30 cm. Kuchár otočí termosku 30-krát za minútu. Ako dlho bude trvať, kým začne vriieť voda? Teplotné straty zanedbajte.

Riešenie:

$$E_p = Q$$

$$t \cdot n \cdot m \cdot g \cdot h = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

$$t = \frac{Q}{n \cdot m \cdot g \cdot h} = \frac{c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\frac{30 \text{ zatrepaní}}{1 \text{ minúta}} \cdot m \cdot g \cdot h} = \frac{4186 \cdot 0,5 \cdot (100 - 20)}{\frac{30 \text{ zatrepaní}}{1 \text{ minúta}} \cdot 0,5 \cdot 9,81 \cdot 0,3} = 3792 \text{ min} = 63,22 \text{ hod} = 2 \text{ dni } 15 \text{ hod}$$

**Príklad 12**

Karamelová tyčinka má uvedenú nutričnú hodnotu 350 kcal. Koľko kilowatthodín vám dodá, keď ju zjete?

Riešenie:

$$E = (350 \cdot 10^3 \text{ cal}) \cdot (4,19 \text{ J/kg}) = (1,466 \cdot 10^6 \text{ J}) \cdot (1 \text{ W} \cdot \text{s/J}) \cdot (1 \text{ h}/3600 \text{ s}) \cdot (1 \text{ kW}/1000 \text{ W}) = 0,407 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

Táto energia by stačila k tomu, aby 100 W žiarovka svietila po dobu 4,1 h. Ak chcete takúto dobu „vybehať“, bežte nejakých 5-6 km.

Slušná denná dávka energie je pre človeka okolo 3,5 kW·h. Je to taktiež maximálna práca, ktorú je človek schopný za jeden deň vykonať. Toto množstvo energie z elektrickej siete stojí u nás cca  $0,15 \text{ €}/(\text{kWh}) \times 3,5 \text{ kW} \cdot \text{h} = 0,53 \text{ €}$ .

**Príklad 13**

Medený valček o hmotnosti  $m_{\text{Cu}} = 75 \text{ g}$  bol v laboratórnej pecku zahriaty na teplotu  $\vartheta = 312 \text{ °C}$ . Potom bol vhozený do nádoby obsahujúcej  $m_{\text{v}} = 220 \text{ g}$  vody. Tepelná kapacita nádoby je  $C_{\text{n}} = 45 \text{ cal/K}$ . Počiatočná teplota nádoby s vodou bola  $\vartheta_1 = 12 \text{ °C}$ . Aká bude koncová teplota  $\vartheta_2$  valčeka, vody a nádoby po dosiahnutí tepelnej rovnováhy?

Riešenie:

Náš systém budú tvoriť *voda, nádoba a medený valček*. Systém nevymení s okolím žiadne teplo, takže algebrický súčet celkového presunu tepla vo vnútri systému musí byť rovný nule. Ide o tri presuny:

$$\text{pre vodu: } Q_{\text{v}} = m_{\text{v}} \cdot c_{\text{v}} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1);$$

$$\text{pre nádobu: } Q_{\text{n}} = C_{\text{n}} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1);$$

$$\text{pre meď: } Q_{\text{Cu}} = m_{\text{Cu}} \cdot c_{\text{Cu}} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta).$$

Teplotný rozdiel je vo všetkých výrazoch zapísaný ako rozdiel koncovkej teploty ( $\vartheta_2$ ) a počiatočnej teploty ( $\vartheta_1$  pre vodu a nádobu,  $\vartheta$  pre valček). Značíme to takto, hoci vieme, že  $Q_{\text{v}}$  a  $Q_{\text{n}}$  budú kladné (pretože teplo prejde do pôvodne chladnej vody a nádoby), zatiaľ čo  $Q_{\text{Cu}}$  bude záporné (pretože teplo sa odoberie z pôvodne horúceho medeného valčeka). Takto môžeme totiž napísať

$$Q_{\text{v}} + Q_{\text{n}} + Q_{\text{Cu}} = 0$$

Po dosadení za výrazy pre prenos tepla (z predchádzajúcej rovnice) dostaneme

$$m_{\text{v}} \cdot c_{\text{v}} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) + C_{\text{n}} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) + m_{\text{Cu}} \cdot c_{\text{Cu}} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta) = 0$$

V tejto rovnici sa vyskytujú teploty len v rozdieloch. Pretože rozdiely teplôt v stupňoch Celzia a v kelvinoch sú rovnaké, môžeme použiť v rovniciach ktorékoľvek z jednotiek. Rovnicu môžeme vyriešiť pre  $\vartheta_2$  a dostaneme

$$\vartheta_2 = \frac{m_{\text{Cu}} \cdot c_{\text{Cu}} \cdot \vartheta + C_{\text{n}} \cdot \vartheta_1 + m_{\text{v}} \cdot c_{\text{v}} \cdot \vartheta_1}{m_{\text{Cu}} \cdot c_{\text{Cu}} + C_{\text{n}} + m_{\text{v}} \cdot c_{\text{v}}}.$$

Pri použití Celziovej stupnice je čitateľ rovný

$$(75 \text{ g}) \cdot (0,092 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) \cdot (312 \text{ °C}) + (45 \text{ cal/K}) \cdot (12 \text{ °C}) + (220 \text{ g}) \cdot (1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) \cdot (12 \text{ °C}) = 5332,8 \text{ cal}$$

a menovateľ

$$(75 \text{ g}) \cdot (0,092 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) + 45 \text{ cal/K} + (220 \text{ g}) \cdot (1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{K})) = 271,9 \text{ cal/°C}.$$

Odkiaľ získame:

$$\vartheta_2 = \frac{5332,8 \text{ cal}}{271,9 \text{ cal/°C}} = 19,6 \text{ °C} \cong 20 \text{ °C}$$

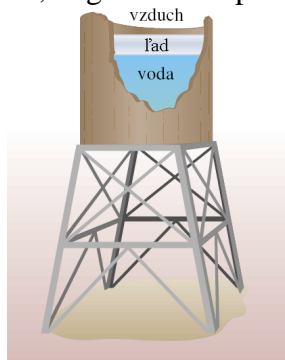
Z uvedených hodnôt môžeme nájsť

$$Q_{\text{v}} \cong 1670 \text{ cal}, \quad Q_{\text{n}} \cong 342 \text{ cal}, \quad Q_{\text{Cu}} \cong -2020 \text{ cal}.$$

Algebraický súčet týchto troch prenesených tepiel je až na zaokrúhľovacie chyby skutočne rovný nule, v súlade s požiadavkou  $Q_v + Q_n + Q_{Cu} = 0$ .

**Príklad 14**

Nádrž s vodou bola vystavená vonkajšiemu vplyvu mrazivého počasia. Vytvorila sa vrstva ľadu o hrúbke 5 cm. Vzduch nad ľadom mal teplotu  $-10\text{ }^\circ\text{C}$ . Vypočítajte rýchlosť nárastu ďalšieho ľadu na spodku ľadovej vrstvy (v cm/hod). Tepelná vodivosť ľadu je  $0,004\text{ cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}\cdot^\circ\text{C})$  a hustota ľadu je  $0,92\text{ g}/\text{cm}^3$ . Predpokladajte, že nádrž dokonale izoluje.



## 2 FOURIEROV ZÁKON

Na zopakovanie:

**Tepló** je forma **energie**, ktorú môžeme charakterizovať ako **interakciu** medzi **teplým** a **studeným** telesom alebo ako energiu kmitajúcich molekúl.

Prenos tepla sa uskutočňuje:

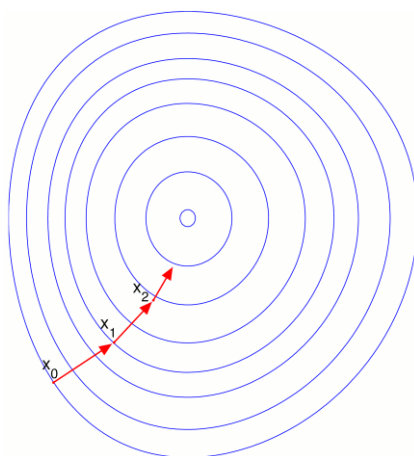
- **vedením** (kondukcia)
- **prúdením** (konvekcia)
- **sálaním** (radiácia)

Vo všeobecnosti sa uskutočňuje kombináciou dvoch alebo viacerých metód prenosu tepla.

*Prečo máme vyšetrovať prenos tepla?*

V mnohých prípadoch potrebujeme zaistiť **zvýšenie** tepelného prenosu (napr. v tepelných výmenníkoch) alebo **zabrániť** tepelnému prenosu (napr. zateplenie podkrovného bytu). K riešeniu týchto procesov slúžia procesy šírenia tepla popísané vyššie.

Smer najväčšieho rastu funkcie nám udáva **gradient** skalárnej funkcie (má smer aj orientáciu).



Jeho označenie je

$$\text{grad } \vartheta = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta n} \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \mathbf{k} \quad (1)$$

kde  $\mathbf{n}_0$  je všeobecný jednotkový vektor  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sú jednotkové vektory v pravouhlej sústave súradníc. **Gradient teploty** je vektorovou veličinou, rovnako ako **intenzita teplotného poľa**  $\mathbf{E}_\vartheta$ , pre ktorú platí

$$\mathbf{E}_\vartheta = -\text{grad } \vartheta \quad (2)$$

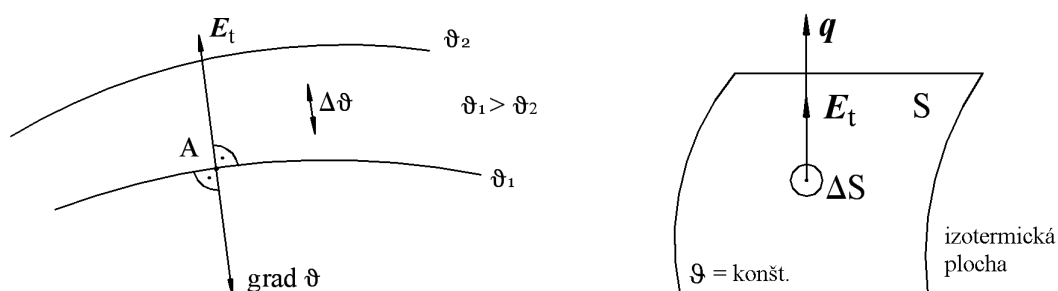
V skalárnom teplotnom poli krivkový integrál intenzity teplotného poľa po ľubovoľnej **uzavretej krivke** sa vždy rovná nule, t.j.

$$\int_l \mathbf{E}_\vartheta \cdot d\mathbf{l} = \int_l (-\text{grad } \vartheta) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3)$$

Naopak integrál intenzity teplotného poľa len po ľubovoľnej **časti krivky** (medzi dvoma bodmi krivky) sa nerovná nule:

$$\int_l \mathbf{E}_\vartheta \cdot d\mathbf{l} = \int_l (-\text{grad } \vartheta) \cdot d\mathbf{l} = \vartheta_1 - \vartheta_2 = \Delta \vartheta \quad (4)$$

ale teplotnému rozdielu  $\Delta\vartheta$  medzi uvažovanými bodmi. Dôsledkom existujúceho rozdielu  $\Delta\vartheta$  je prenos tepla v *smere intenzity teplotného poľa*, resp. v smere záporného gradientu teploty, teda z vyššej potenciálovej hladiny smerom k nižšej.

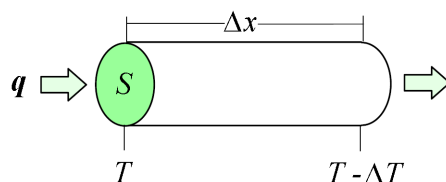


Znázornenie gradientu teploty a hustoty tepelného toku

### Prenos tepla vedením (kondukcia)

#### Fourierov zákon:

Rýchlosť šírenia tepla v tuhom telese je priamoúmerné gradientu teploty a ploche kolmej na smer toku tepla.



Teplotný gradient je rovný

$$\frac{(T - \Delta T) - T}{\Delta x} = -\frac{\Delta T}{\Delta x} \approx -\frac{\partial T}{\partial x} \quad (5)$$

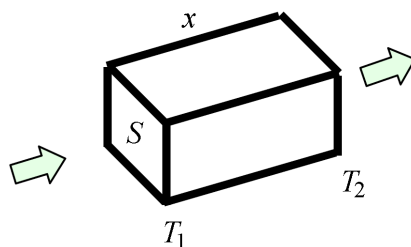
alebo

$$\Phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6)$$

kde  $\lambda$  je súčiniteľ tepelnej vodivosti [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]

Pre *stacionárne* 1-rozmerné teplotné pole rovnica (6) prejde na tvar:

$$\Phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{x} \quad (7)$$



Ak rovnicu (7) upravíme, získame rovnicu analogickú *Ohmovmu zákonu*:

$$T_1 - T_2 = \Phi \cdot \frac{x}{\lambda \cdot S} \quad (8)$$

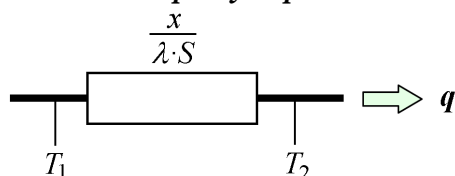
$$U = I \cdot R \quad (9)$$

kde výraz  $\frac{x}{\lambda \cdot S}$  môžeme chápať ako tepelný odpor materiálu

$T_1 - T_2$  je tepelný potenciál

$\Phi$  je tepelný „prúd“

Symbolom  $R_{\vartheta}$  sa zvykne označovať tzv. *tepelný odpor*.



Ak potrebujeme poznať ako sa mení teplota v rôznych miestach telesa (plochy, na dĺžke), musíme vyšetriť priebeh funkcie teploty podľa jednotlivých súradníc.

Úpravou rovnice (6) získame:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\Phi}{\lambda \cdot S} = -\frac{\Phi'}{\lambda} \quad (10)$$

Pre stacionárny dej je pravá strana rovnice konštantná, preto po zderivovaní rovnice (10) dostávame:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

Pozn.: všeobecne:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (12)$$

t.j. podmienka vedenia tepla v 1-rozmernom priestore pozostáva z riešenia **diferenciálnej rovnice 2. rádu**. Je to Laplaceova rovnica, ktorá je matematickým modelom stacionárneho teplotného poľa **bez vnútorného zdroja**, pretože teplota sa mení len v priestore, nie v čase.

Pre rovinnú dosku:

Vychádzajúc z Laplaceovej rovnice (12) aplikovaním na 1-rozmerné pole získame:

$$-\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

Jej následným 2-násobným integrovaním a zavedením hraničných podmienok (v mieste  $x = 0$ ,  $T = T_1$  a  $x = s$ ,  $T = T_2$ ) dostaneme lineárnu zmenu funkcie teploty  $T$  meniacu pozdĺž jej hrúbky:

$$-\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad / \int ( ) dx$$

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = c_1 \quad / \int ( ) dx$$

$$-\lambda \cdot T = c_1 \cdot x + c_2 \quad / \cdot \left( -\frac{1}{\lambda} \right)$$

$$T = -\frac{c_1 \cdot x}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} \quad / \text{subst.: } x = 0, T = T_1 \text{ a } x = s, T = T_2$$

$x = 0, T = T_1$ :

$$T_1 = -\frac{c_1 \cdot 0}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} = -\frac{c_2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -T_1 \cdot \lambda$$

$x = s, T = T_2$ :

$$T_2 = -\frac{c_1 \cdot s}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} = -\frac{c_1 \cdot s}{\lambda} - \frac{(-T_1 \cdot \lambda)}{\lambda} = -\frac{c_1 \cdot s}{\lambda} + T_1 \quad / \cdot \lambda$$

$$T_2 \cdot \lambda = -c_1 \cdot s + T_1 \cdot \lambda \quad /-(T_1 \cdot \lambda)$$

$$T_2 \cdot \lambda - T_1 \cdot \lambda = -c_1 \cdot s \quad / \cdot \left(\frac{1}{s}\right)$$

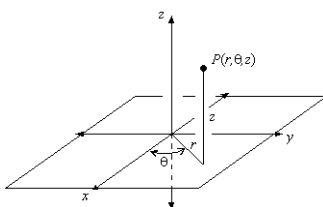
$$c_1 = -\frac{\lambda}{s} \cdot (T_2 - T_1)$$

dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme riešenie teplotnej funkcie pre 1-rozmerné pole (rovinnú dosku):

$$T = -\frac{c_1 \cdot x}{\lambda} - \frac{c_2}{\lambda} = -\frac{\left[-\frac{\lambda}{s} \cdot (T_2 - T_1)\right] \cdot x}{\lambda} - \frac{(-T_1 \cdot \lambda)}{\lambda}$$

$$T = (T_2 - T_1) \cdot \frac{x}{s} + T_1$$

Pre valcovú tyč:



**Intenzitu prenosu tepla** v teplotnom poli hodnotíme veličinami:

1. Celkovým množstvom preneseného tepla  $Q$  [J]
2. Tepelným tokom  $\Phi$  [W], identickým s tepelným výkonom poľa

$$\Phi = P_{\vartheta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (6.6)$$

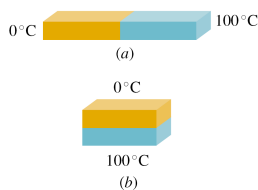
3. Vektorom hustoty tepelného toku  $\mathbf{q}$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ]

$$\mathbf{q} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta S} = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dQ}{dS \cdot dt} \quad (6.7)$$

Nutnou podmienkou prenosu tepla je nerovnosť grad  $\vartheta \neq 0$ . Naopak pri rovnosti grad  $\vartheta = 0$ , prenos tepla v teplotnom poli sa neuskutočňuje, pole je izotermické. Napokon teplotné pole môže byť bezžriedlové alebo žriedlové. V žriedlovom poli existuje vnútorný zdroj tepla, napr. elektrický, ktorý budeme definovať neskôr.

### Príklad 1

Dva rovnaké pravouhlé hranoly sú k sebe na koncoch zvarené. Preteká nimi ustálený tok tepla 10 J za dve minúty. Za aký čas by prešlo 10 J rovnakými hranolmi, ale zvarenými k sebe po dĺžke? ( $a = 1$  cm,  $b = 2$  cm,  $c = 4$  cm).





Riešenie:

$$\Phi_{\text{za sebou}} = \lambda \cdot S_1 \cdot \frac{\Delta \vartheta}{d_1} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{d_1}{S_1} = \lambda \cdot \Delta \vartheta$$

$$\Phi_{\text{po dlzke}} = \lambda \cdot S_2 \cdot \frac{\Delta \vartheta}{d_2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{po dlzke}} \cdot \frac{d_2}{S_2} = \lambda \cdot \Delta \vartheta$$

$$S_1 = a \cdot b; \quad d_1 = c$$

$$S_2 = b \cdot \frac{c}{2}; \quad d_2 = 2 \cdot a$$

$$\Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{d_1}{S_1} = \Phi_{\text{po dlzke}} \cdot \frac{d_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{po dlzke}} = \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{d_1}{S_1} \cdot \frac{S_2}{d_2} = \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{c}{a \cdot b} \cdot \frac{b \cdot \frac{c}{2}}{2 \cdot a}$$

$$\Phi_{\text{po dlzke}} = \Phi_{\text{za sebou}} \cdot \frac{c^2}{4 \cdot a^2} = \frac{10}{120} \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2})^2}{4 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{1}{3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = \frac{Q}{\Phi_{\text{po dlzke}}} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30 \text{ s}$$

### Príklad 2

Vypočítajte tepelný tok dverami, ktoré sú 2 m vysoké a 0,75 m široké.

- Dvere tvorí panel z hliníka hrúbky 1,5 mm, pokrytý na 75 % panelom zo skla hrubého 3 mm.
- Dvere sú z bielej borovice a sú 2,5 cm hrubé.

Predpokladajte rozdiel vnútornej a vonkajšej teploty 33 °C. Vplyv zárubne a rámu zanedbajte.

Riešenie:

a)

$$\Phi_{\text{Al}} = \frac{25}{100} \cdot \left( \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} \right) = \frac{25}{100} \cdot \left[ 235 \cdot (2 \cdot 0,75) \cdot \frac{33}{1,5 \cdot 10^{-3}} \right] = \frac{7755000}{4} = 1938750 \text{ W}$$

$$\Phi_{\text{sklo}} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 1 \cdot (2 \cdot 0,75) \cdot \frac{33}{3 \cdot 10^{-3}} = 16500 \text{ W}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{Al}} + \Phi_{\text{sklo}} = 1938750 + 16500 = 1955250 \text{ W}$$

$$\text{b) } \Phi_{\text{borovica}} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 0,11 \cdot (2 \cdot 0,75) \cdot \frac{33}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 217,8 \text{ W}$$

### Príklad 3

Veľká valcová cisterna na vodu má železné dno s priemerom 1,7 m a hrúbkou steny 5,2 mm. Voda je ohrievaná plynovým horákom tak, že sa udržuje teplotný rozdiel 2,3 °C medzi voľnou hladinou a dnom cisterny. Koľko tepla prejde dnom za 5 minút? (Železo má tepelnú vodivosť 67 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>.)

Riešenie:

$$\Phi_1 = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 67 \cdot \left[ \pi \cdot \left( \frac{1,7}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{2,3}{5,2 \cdot 10^{-3}} = 67264,67 \text{ W}$$

$$Q = \Phi_1 \cdot t = 67264,67 \cdot 5 \cdot 60 = 20179401 \text{ W}$$

**Príklad 4**

- a) Aké sú tepelné straty okna, ak hrúbka skla je 3 mm, vnútorná teplota je 22 °C a vonkajšia -20 °C?
- b) Vonkajšie okno sa skladá z dvoch sklenených dosiek rovnakej hrúbky. Medzi doskami skla je vzduchová vrstva hrúbky 7,5 mm. Aké budú tepelné straty, ak uvažujeme len straty vedením tepla?

Riešenie:

$$a) \quad q = \frac{\Phi}{S} = \lambda \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 1 \cdot \frac{22 - (-20)}{3 \cdot 10^{-3}} = 14000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$b) \quad q = \frac{\Phi}{S} = \lambda \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{d_{\text{sklo}}}{\lambda_{\text{sklo}}} + \frac{d_{\text{vzduch}}}{\lambda_{\text{vzduch}}} + \frac{d_{\text{sklo}}}{\lambda_{\text{sklo}}}} = \frac{22 - (-20)}{\frac{3 \cdot 10^{-3}}{1} + \frac{7,5 \cdot 10^{-3}}{0,026} + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1}} = 142,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

**Príklad 5**

Priemerná hustota tepelného toku zemským povrchom je 54 mW·m<sup>-2</sup>. Priemerná tepelná vodivosť skaly je 2,5 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>. Ak má povrch teplotu 10 °C, aká by mala byť teplota v hĺbke 35 km? (V skutočnosti je teplota spoluvytváraná rozpadom rádioaktívnych prvkov v zemskej kôre. To však zanedbajte.)

Riešenie:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \lambda \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1 = q \cdot \frac{d}{\lambda} + \vartheta_2 = 54 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{35 \cdot 10^3}{2,5} + 10 = 766 \text{ °C}$$

**Príklad 6**

Tepelná vodivosť skla (Pyrex) je 2,9·10<sup>-3</sup> cal/(cm·°C·s) pri 0 °C.

- a) Preveďte túto hodnotu na jednotky sústavy SI.
- b) Aký je tepelný odpor  $R_{\vartheta}$  sklenenej dosky hrúbky 0,25 palca?

Riešenie:

$$a) \quad 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$b) \quad R = \frac{l}{\lambda} = \frac{0,25 \cdot (2,54 \cdot 10^{-2})}{1,2} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

**Príklad 7**

- a) Vypočítajte tepelný tok oblečenia lyžiara v ustálenom stave, pokiaľ viete, že povrch ľudského tela je približne 1,8 m<sup>2</sup> a vrstva oblečenia je 1 cm hrubá. Povrchová teplota kože človeka je 33 °C, teplota povrchu obleku je 1 °C, tepelná vodivosť oblečenia je 0,04 W/(m·K).
- b) Ako sa zmení situácia, keď lyžiar spadne a oblečenie nasiakne vodou s tepelnou vodivosťou 0,6 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>?

Riešenie:

$$a) \quad \Phi = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 0,04 \cdot 1,8 \cdot \frac{33 - 1}{1 \cdot 10^{-2}} = 230,4 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$b) \quad \Phi_{\text{s vodou}} = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 0,6 \cdot 1,8 \cdot \frac{33 - 1}{1 \cdot 10^{-2}} = 3456 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

čo je približne 15-krát viac ako suché oblečenie.

**Príklad 8**

Valcová medená tyč s dĺžkou 1,2 m a prierezom  $4,8 \text{ cm}^2$  je izolovaná proti povrchovým tepelným stratám. Konce tyče udržujeme pri teplotnom rozdieli  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , jeden sa dotýka kusu ľadu a druhý je ponorený vo vriacej vode.

- Vypočítajte závislosť teploty na vzdialenosti od konca tyče.
- Ako rýchlo sa bude rozpúšťať ľad?

Pouvažujte, aká fyzikálna jednotka najlepšie popisuje „rýchlosť rozpúšťania ľadu.“

Riešenie:

$$\text{a) } \Phi = \lambda \cdot S \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{d} = 401 \cdot (4,8 \cdot 10^{-4}) \cdot \frac{100}{1,2} = 16,04 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

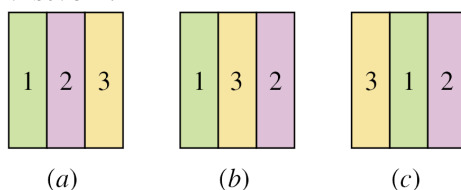
$$\text{b) } \left| \frac{dm}{dt} \right| = \frac{\Phi}{L_{\text{topenia}}} = \frac{16 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}}{333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}} = 0,048 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

Opisuje ju napr. prietok (rýchlosť toku hmoty).

**Príklad 9**

Na obrázku sú tri rôzne usporiadania materiálov 1, 2 a 3 tvoriacich stenu. Ich tepelné vodivosti sú  $k_1 > k_2 > k_3$ . Ľavá strana steny je o  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  teplejšia ako pravá. Usporiadajte steny vzostupne podľa:

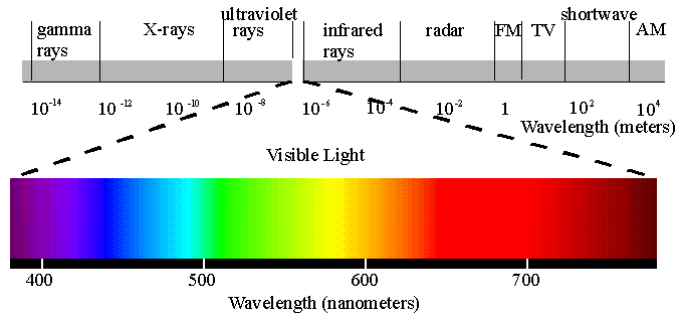
- toku energie stenou,
- teplotného úbytku na vrstve 1.



### 3 STEFANOV-BOLTZMANNOV ZÁKON

#### Žiarenie (radiácia, sálanie)

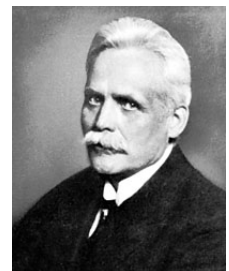
**Tepelné žiarenie** vzniká pri tepelnom pohybe nabitých častíc. Tepelné žiarenie vyžaruje každé teleso, ktorého teplota je vyššia ako 0 K. Tepelné žiarenie telesa tvorí elektromagnetické vlnenie rôznych vlnových dĺžok v závislosti od teploty a zloženia telesa. Pri teplotách približne do 500 °C je prevažne infračervené. So zvyšovaním teploty pribúda energie vyžiarenej v oblasti viditeľného svetla.



**Wienov zákon posunu** – zákon, podľa ktorého sa maximum intenzity žiarenia absolútne čierneho telesa posúva v závislosti od teploty.

$$\lambda = \frac{b}{T} \quad [\text{m}; \text{m}\cdot\text{K}, \text{K}] \quad (1)$$

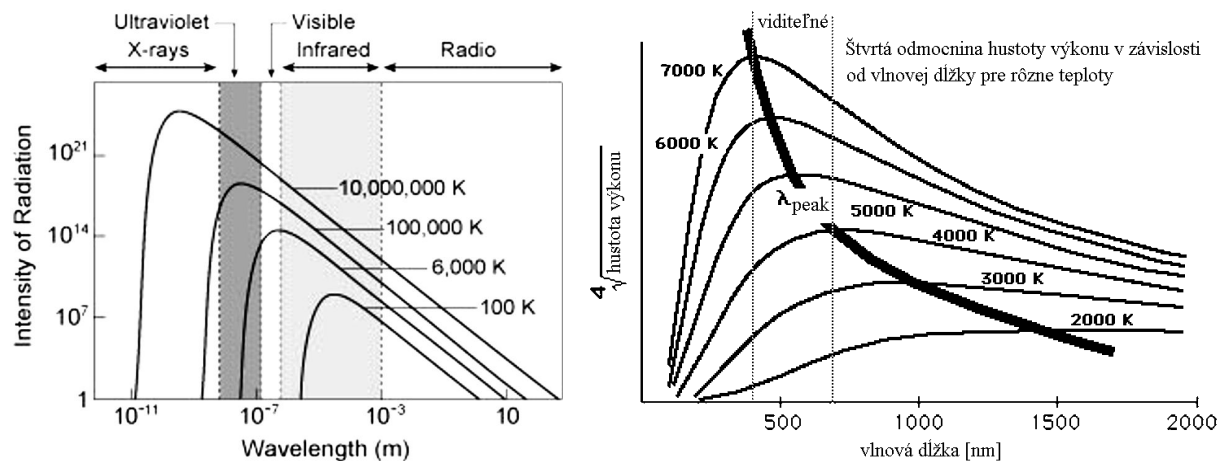
kde  $\lambda$  vlnová dĺžka [m]  
 $b$  Wienova konštanta;  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$   
 $T$  teplota [K]



**Absolútne čierne teleso** – ideálne teleso, ktoré úplne pohlcuje žiarenie všetkých vlnových dĺžok dopadajúcich na jeho povrch.

**Sivé teleso** – je idealizované teleso, ktoré má na všetkých vlnových dĺžkach rovnaký absorpčný koeficient podobne ako čierne teleso. Na rozdiel od neho, absorpčný koeficient sivého telesa  $\kappa < 1$ .

**Absorpčný koeficient  $\kappa$**  – je relatívne množstvo energie, ktoré sa zo žiarenia pohltí pri jeho prechode jednotkovou dĺžkou určitého prostredia.



**Stefanov-Boltzmannov zákon** (publikovaný v roku 1879 Ludwigom Boltzmannom a Josefom Stefanom) – popisuje celkovú intenzitu žiarenia **absolútne čierneho telesa**. Tento zákon hovorí, že intenzita vyžarovania rastie so štvrtou mocninou termodynamickej teploty žiariaceho telesa.

$$q = \sigma \cdot T^4 \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}; \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}, \text{K}] \quad (2)$$

kde  $q$  celková intenzita žiarenia [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ]

$\sigma$  Stefan-Boltzmannova konštanta

$$\sigma = \frac{2 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot c^2 \cdot h^3} = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

kde  $k$  Boltzmannova konštanta;  $k = (1,380658 \pm 0,000012) \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

$c$  rýchlosť svetla;  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$h$  Planckova konštanta;  $h = 6,62607 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$T$  termodynamická teplota [K]



### Sálanie medzi dvoma povrchmi šedých telies

Tepelné žiarenie (infra-červené žiarenie) sa šíri rýchlosťou svetla, má však väčšiu vlnovú dĺžku. Rovnako ako svetelné žiarenie, je aj infra žiarenie odrážané lesklými povrchmi a pohlcované je matnými a drsnými povrchmi. Povrchy s veľkou odrazivosťou (**reflexiou**) majú nízke sálanie (**emisivitu**) a naopak.

Material	$r$ (%)	$e$
striebro leštené	99	0,01
meď leštená	98	0,02
zlato leštené	97	0,03
hliník leštený	95÷97	0,04
hliník drsný	92÷94	0,07
hliník zoxidovaný	70÷80	0,25
hliníkový náter	60÷80	0,30
asfalt	6	0,94
strešná lepenka	7	0,93
vápenná omietka	7	0,93
sklo	8	0,92
tehlové murivo	10	0,90
papier	10	0,90
betón	11	0,89
laky a emaily	8÷15	0,88
drevo hobľované	20	0,80

Energetická bilancia dopadajúcej sálavej energie na povrch telesa vychádza z jej rozdelenia na zložky energie povrchom:

- **pohltenú** (absorbpcia)
- **odrazenú** (reflexia)
- **telesom prepustenú** (difuzivita (refrakcia))

Platí teda vzťah:

$$Q_{\text{dop}}^* = Q_{\text{A}}^* + Q_{\text{R}}^* + Q_{\text{D}}^* \quad (3)$$

alebo

$$\frac{Q_A^*}{Q_{\text{dop}}^*} + \frac{Q_R^*}{Q_{\text{dop}}^*} + \frac{Q_D^*}{Q_{\text{dop}}^*} = A + R + D = 1 \quad (4)$$

Veľkosť koeficientov sa teoreticky môže pohybovať v intervale  $\langle 0, 1 \rangle$ , čo umožňuje definovať absolútne čierne teleso ( $A = 1, R = D = 0$ ), absolútne biele teleso ( $R = 1, A = D = 0$ ) a absolútne priehľadné teleso ( $D = 1, A = R = 0$ ). Také telesá sú ideálne, pre reálne tuhé telesá platí  $A < 1, R < 1, D = 0$ , teda

$$A + R = 1 \quad (5)$$

Reálne tuhé telesá s vlastnosťou (5) sa nazývajú **šedé**.

V súlade s rovnicou (5) dopadajúci sálavý tok na povrch šedého telesa je

$$Q_{\text{dop}} = Q_A + Q_R = A \cdot Q_{\text{dop}} + R \cdot Q_{\text{dop}} \quad (6)$$

potom odrazená zložka toku

$$Q_R = R \cdot Q_{\text{dop}} = Q_{\text{dop}} - A \cdot Q_{\text{dop}} = (1 - A) \cdot Q_{\text{dop}} \quad (7)$$

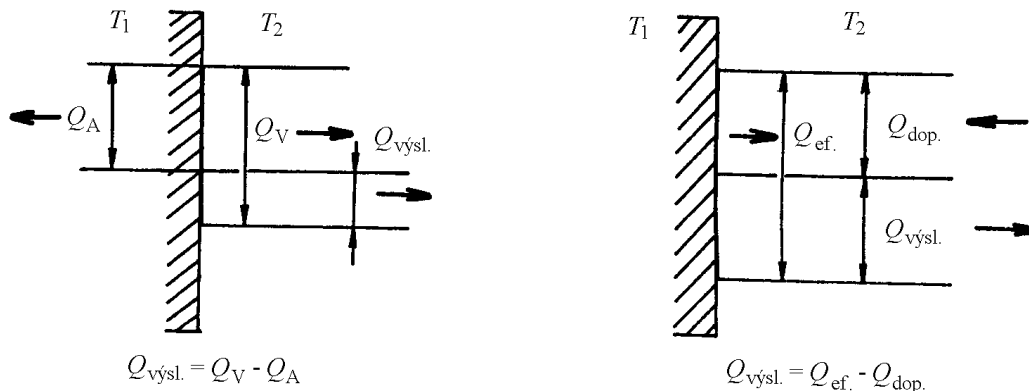
Ak povrch telesa  $S$  so stupňom čiernosti  $\varepsilon$  má teplotu  $T$ , vyžaruje podľa Stefanovho-Boltzmannovho zákona tok

$$Q_v = \varepsilon \cdot c_0 \cdot T^4 \cdot S \quad (8)$$

Pretože tento tok je závislý len od vlastností a teploty telesa, nazýva sa **vlastný sálavý tok**. Súčet vlastného sálavého toku a odrazenej zložky dopadajúceho toku je **efektívny sálavý tok**.

$$Q_{\text{ef}} = Q_v + Q_R = \varepsilon \cdot c_0 \cdot T^4 \cdot S + (1 - A) \cdot Q_{\text{dop}} \quad (9)$$

V energetickej bilancii sálania tepla medzi dvoma šedými povrchmi sa okrem vlastného a efektívneho toku vyhodnocuje **výsledný sálavý tok**. Fyzikálne je to tok „tečúci“ medzi povrchmi s teplotami  $T_1$  a  $T_2$  a je definovaný rozdielom vlastného sálavého toku povrchu o teplote  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) a toku nim pohlteneho z povrchu o teplote  $T_2$  (resp.  $T_1$ ) (obr. nižšie).



Obr. Sálavé toky

$$Q_{\text{vysl}} = Q_v - Q_A = \varepsilon \cdot c_0 \cdot T^4 \cdot S - A \cdot Q_{\text{dop}} \quad (10)$$

### Príklad 1

Guľa s polomerom 0,5 metra a teplotou  $27^\circ\text{C}$  má emisivitu 0,85 a je v prostredí s teplotou  $77^\circ\text{C}$ .

- Aký tepelný výkon vyžaruje?
- Aký výkon pohlcuje?
- Aký je celkový vyžarovací výkon gule?

Riešenie:

- Teplota gule:  
 $T = 273,15 + 27 = 300,15 \text{ K}$

Vyžiarený výkon:

$$\Phi_{\text{radiation}} = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot T^4 = \left( 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \right) \cdot 0,85 \cdot \left[ 4 \cdot \pi \cdot (0,5 \text{ m})^2 \right] \cdot (300,15 \text{ K})^4 = 1,23 \cdot 10^3 \text{ W}$$

b) Teplota prostredia:

$$T_{\text{prostredie}} = 273,15 + 77 = 350,15 \text{ K}$$

Pohltený (absorbovaný) výkon:

$$\Phi_{\text{absorption}} = \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot T_{\text{prostredie}}^4 = \left( 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \right) \cdot 0,85 \cdot \left[ 4 \cdot \pi \cdot (0,5 \text{ m})^2 \right] \cdot (350,15 \text{ K})^4 = 2,28 \cdot 10^3 \text{ W}$$

c) Celkový vyžarovací výkon gule:

$$\Phi_{\text{celkovy}} = \Phi_{\text{absorption}} - \Phi_{\text{radiation}} = 2,28 \cdot 10^3 \text{ W} - 1,23 \cdot 10^3 \text{ W} = 1,05 \cdot 10^3 \text{ W}$$

### Príklad 2

Kocka s dĺžkou hrany  $6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ , s emisivitou 0,75 a s teplotou  $-100 \text{ }^\circ\text{C}$  sa nachádza v prostredí s teplotou  $-150 \text{ }^\circ\text{C}$ . Aký tepelný výkon si vymieňa s okolím?

Riešenie:

Kocka má 6 stien, z ktorých každá má plochu  $(6 \cdot 10^{-6})^2 \text{ m}^2$ . Teploty v  $^\circ\text{C}$  premeníme na Kelviny a získame:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sigma \cdot \varepsilon \cdot S \cdot (T_{\text{prostredie}}^4 - T^4) = \\ &= \left( 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \right) \cdot 0,75 \cdot (2,16 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2) \cdot \left[ (123,15 \text{ K})^4 - (173,15 \text{ K})^4 \right] = -6,1 \cdot 10^{-9} \text{ W} \end{aligned}$$

### Príklad 3

Valec s polomerom  $r_1 = 2,5 \text{ cm}$  a dĺžke  $h_1 = 5 \text{ cm}$  má emisivitu 0,85 a teplotu  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Je zavesený v prostredí s teplotou  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- Aký má žiarivý výkon  $\Phi_1$ ?
- Na aký výkon  $\Phi_2$  klesne, ak valcovaním zmenšíme polomer valca na  $r_2 = 0,5 \text{ cm}$  pri zachovaní toho istého objemu?
- Aký je pomer  $\Phi_2/\Phi_1$ ?

Riešenie:

a) Plochu valca vypočítame ako

$$S_1 = 2 \cdot (\pi \cdot r_1^2) + 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot h_1 = 2 \cdot \pi \cdot (2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 + 2 \cdot \pi \cdot (2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \cdot (5 \cdot 10^{-2} \text{ m}) = 1,18 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

Teplota valca je:

$$T_1 = 273 + 30 = 303 \text{ K}$$

a teplota prostredia:

$$T_{\text{prostredie}} = 273 + 50 = 323 \text{ K}$$

Dosadením do Stefan-Boltzmannovej rovnice pre šedé telesá:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sigma \cdot \varepsilon \cdot S_1 \cdot (T_{\text{prostredie}}^4 - T^4) = \\ &= \left( 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \right) \cdot 0,85 \cdot (1,18 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2) \cdot \left[ (323 \text{ K})^4 - (303 \text{ K})^4 \right] = 1,39 \text{ W} \end{aligned}$$

b) Nech nová výška valca je  $h_2$ . Keďže objem  $V$  valca je nezmenený, musíme mať

$$V = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2. \text{ Vyjadríme si } h_2:$$

$$h_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot h_1 = \left(\frac{2,5 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}}\right)^2 \cdot (5 \text{ cm}) = 125 \text{ cm} = 1,25 \text{ m}$$

Nový povrch valca  $S_2$  je:

$$S_2 = 2 \cdot (\pi \cdot r_2^2) + 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot h_2 = 2 \cdot \pi \cdot (0,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 + 2 \cdot \pi \cdot (0,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \cdot (1,25 \text{ m}) = 3,94 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

Výkon  $\Phi_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \sigma \cdot \varepsilon \cdot S_2 \cdot (T_{\text{prostredie}}^4 - T^4) = \\ &= \left(5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}\right) \cdot 0,85 \cdot (3,94 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2) \cdot [(323 \text{ K})^4 - (303 \text{ K})^4] = 4,663 \text{ W} \end{aligned}$$

c) Pomer  $\Phi_2/\Phi_1$ :

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{3,94 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{1,18 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 3,3$$



## 4 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V NEVODIVOM PROSTREDÍ

### Vlnové rovnice elektromagnetického poľa

Termínom *elektromagnetické pole* sa všeobecne označuje forma hmoty, ktorá je vybudená pohybom elektrických nábojov. Má teda určitú hmotnosť, energiu, hybnosť a moment hybnosti. Interakcia elektromagnetického poľa s akoukoľvek látkou sa vždy uskutočňuje prostredníctvom elektrických nábojov obsiahnutých v látke. Elektromagnetické pole, ktoré sa šíri konečnou rýchlosťou sa nazýva *elektromagnetická vlna*. Elektromagnetická vlna vo vákuu sa šíri rýchlosťou svetla. Elektromagnetické pole má dve zložky, *elektrickú* a *magnetickú*. Elektrickú zložku poľa charakterizuje *intenzita elektrického poľa  $E$* , magnetická zložka poľa sa spravidla vyjadruje *intenzitou magnetického poľa  $H$* . Vektory oboch intenzít sú navzájom kolmé.

Elektromagnetické pole, rovnako ako všeobecné elektromagnetické vlnenie (žiarenie), má súčasne korpuskulárny ako aj vlnový charakter. Pri veľkých súboroch kvánt (fotónov), ustupuje diskrétna štruktúra poľa a prevláda vlnová, teda elektromagnetické pole sa považuje za spojito rozložené v priestore.

*Maxwellove rovnice* – sú základné parciálne diferenciálne rovnice teórie elektromagnetického poľa, ktoré popisujú jeho makroskopické zákonitosti. Pre nepohybujúce sa prostredie – priestor vyplnený látkou, ktoré je homogénne, izotropné a lineárne sa udávajú v nasledujúcom poradí a tvare:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \gamma \cdot \mathbf{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$



Tieto štyri Maxwellove rovnice je zvykom dopĺňať tzv. materiálovými rovnicami, ktoré vyjadrujú vplyv prostredia na javy prebiehajúce v elektromagnetickom poli. Pre skôr definované prostredie sú to tieto:

$$\mathbf{J} = \gamma \cdot \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (5)$$

kde  $\gamma$  je konduktivita prostredia [ $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ]

$\varepsilon$  je permitivita prostredia [ $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ ]

$\mu$  je permeabilita prostredia [ $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ ]

Ak v elektromagnetickom poli sa nenachádza voľný elektrický náboj, prirodzene  $\rho_0 = 0$  a teda aj

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (6)$$

V súvislosti s modelovaním viacerých metód elektrických ohrevov je výhodné nahradiť Maxwellove rovnice (1) a (2) takými rovnicami, v ktorých bude len jedna premenná zložka intenzity elektromagnetického poľa, t.j. buď elektrická  $E$  alebo magnetická  $H$ . Tento typ rovníc nazývame *všeobecné rovnice šírenia elektromagnetickej vlny* (ďalej EMV) alebo *vlnové rovnice elektromagnetického poľa* (ďalej EMP). Spolu s podmienkami

jednoznačnosti tvoria matematický model v priestore sa šíriaceho EMP, teda model EMV. Transformácia Maxwellových rovníc na vlnové je jednoduchá, postup naznačíme pre magnetickú zložku intenzity EMP.

Najskôr na 1. Maxwellovu rovnicu (1) uplatníme ďalšiu rotáciu:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}) + \text{rot}\left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad (7)$$

Zavedením zjednodušenia, že materiálové veličiny sú konštantné, môžeme ich vybrať pred výraz:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = \boldsymbol{\gamma} \cdot \text{rot}(\mathbf{E}) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad (8)$$

Dosadením 2. Maxwellovej rovnice (2) do výrazu (8) dostávame:

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) = -\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (9)$$

V ďalšom výpočte využijeme operátor nabra  $\nabla$ , ktorý pre vektorové operácie má nasledovné vyjadrenie:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{k}$$

pre **gradient** skalárnej funkcie  $f$ :

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathbf{k}$$

$$\nabla(f \cdot \mathbf{g}) = f \cdot (\nabla \mathbf{g}) + \mathbf{g} \cdot (\nabla f) \quad (\text{vyjadrenie podobné 1. derivácii súčiny})$$

pre **divergenciu** vektorovej funkcie  $\mathbf{v}(x, y, z) = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k}$ :

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

pre **rotáciu** vektorovej funkcie  $\mathbf{v}(x, y, z) = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k}$ :

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \cdot \mathbf{k} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

**Pozn.:** Rotácia v bode udáva lokálnu mieru rotácie (otočenia), definovanú týmto poľom.

a ešte **Laplaceov** matematický operátor  $\Delta$ :

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Druhé derivácie** vektorových funkcií využitím operátora nabra budú vypadáť nasledovne:

$$\text{div}(\text{grad } f) = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f)$$

$$\Delta f = \nabla^2 f$$

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

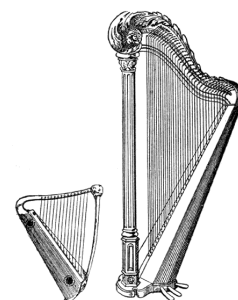
$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v}$$

Niektoré **vlastnosti** vektorových funkcií:

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$



$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \cdot \nabla$$

Využitím operátora nabla  $\nabla$  bude ďalší výpočet nasledovný (pokračovanie rovnice (9)):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (11)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (12)$$

Využitím 4. Maxwellovej rovnice (4)  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , teda aj  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , dostávame:

$$\operatorname{grad}(0) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = -\gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

čo je vlnová rovnica pre magnetickú zložku intenzity EMP. Rovnakým postupom, t.j. uplatnením ďalšej rotácie v 2. Maxwellovej rovnici (2), získame analogickú vlnovú rovnicu pre elektrickú zložku intenzity predmetného poľa, teda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

Rovnice (15) a (16) tvoria sústavu všeobecných rovníc šírenia EMV. Ich všeobecnosť vyplýva z toho, že platia pre ľubovoľné elektrické prostredie (*nevodivé* aj *vodivé*) a pre ľubovoľný časový priebeh premenných  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  EMP. S ohľadom na naše ďalšie používanie ich upravme pre časovo harmonický priebeh oboch zložiek, teda časové vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  vyjadríme rotujúcimi fázormi v komplexnej rovine. Pre tieto potom postupne platí

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}_m \cdot e^{j\omega t}; & \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} &= j \cdot \omega \cdot \mathbf{E}_m \cdot e^{j\omega t} = j \cdot \omega \cdot \underline{\mathbf{E}}; \\ \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \cdot \mathbf{E}_m \cdot e^{j\omega t} = -\omega^2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (17)$$

podobne

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}} &= \mathbf{H}_m \cdot e^{j\omega t}; & \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} &= j \cdot \omega \cdot \mathbf{H}_m \cdot e^{j\omega t} = j \cdot \omega \cdot \underline{\mathbf{H}}; \\ \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \cdot \mathbf{H}_m \cdot e^{j\omega t} = -\omega^2 \cdot \underline{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (18)$$

S využitím zápisov (17) a (18) rovnice (15) a (16) budú mať konkrétnejší obsah a po úprave tvar

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{H}} + (\omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu) \cdot \underline{\mathbf{H}} = \nabla^2 \underline{\mathbf{H}} + k^2 \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (19)$$

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + (\omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu) \cdot \underline{\mathbf{E}} = \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad (20)$$

Sú to **vlnové rovnice harmonického EMP**, vyjadrujú šírenie magnetickej a elektrickej zložky tej istej harmonickej EMV v elektricky ľubovoľnom prostredí. Elektrické vlastnosti prostredia a uhlová rýchlosť vlnenia, obsiahnuté v rovnakom dvojčlene oboch rovníc sumarizuje konštanta šírenia vlnenia, resp. vlnové číslo  $k$ , t.j.

$$k^2 = \omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \quad (21)$$

teda v komplexnej rovine má reálnu zložku a imaginárnu zložku

$$k = \sqrt{-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} = \alpha - j \cdot \beta \quad [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (22)$$

Obe zložky, reálne a kladné, vyčíslime dosadením (22) do (21). Po úprave dostaneme:

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} \right)^2} \right]} \quad [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (23)$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} \right)^2} \right]} \quad [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (24)$$

Zložka  $\alpha$  sa nazýva **fázová konštanta** (činiteľ fázy), zložka  $\beta$  je **konštanta tlmenia** (tiež merný útlm alebo činiteľ tlmenia).

Napokon úpravou predmetných konštánt (22) až (24) získame pre elektricky konkrétne prostredie a prostredníctvom nich aj vlnové rovnice harmonického EMP (19) a (20). Využijeme pritom známe vzťahy medzi fyzikálnymi konštantami, ako

$$c_0^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}; \quad v^2 = \frac{1}{\mu \cdot \varepsilon} = \frac{c_0^2}{\mu_r \cdot \varepsilon_r}; \quad \lambda = \frac{v}{f} \quad (25)$$

postupne pre rýchlosť EMV vo vákuu, pre rýchlosť EMV v prostredí s permeabilitou  $\mu$  a permitivitou  $\varepsilon$  a pre vlnovú dĺžku  $\lambda$ .

Úpravou dostaneme:

- pre elektricky **nevodivé** prostredie, t.j.  $\gamma = 0$ :

$$k^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon; \quad k = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \frac{\omega}{v};$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot (1+1)} = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = k = \frac{\omega}{v}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot (1-1)} = 0 \quad (26)$$

Zodpovedajúce vlnové rovnice pre nevodivé prostredie sú:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \underline{H} + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \underline{H} &= \nabla^2 \underline{H} + \alpha^2 \underline{H} = 0 \\ \nabla^2 \underline{E} + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \underline{E} &= \nabla^2 \underline{E} + \alpha^2 \underline{E} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Z transformovaných vzťahov v sústave (27) vyplýva:

V dokonale nevodivom prostredí elektromagnetická vlna sa neutlmuje ( $\beta = 0$ ), konštanta šírenia vlnenia  $k$  sa redukuje na fázovú konštantu  $\alpha$ , teda na reálne číslo. Rýchlosť šírenia a vlnová dĺžka EMV v nevodivom prostredí sú

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{\omega}{\alpha}; \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\alpha} \quad (28)$$

teda závisia od frekvencie zdroja vlnenia a od fyzikálnych vlastností prostredia ( $\mu$  a  $\varepsilon$ ).

- pre elektricky **vodivé** prostredie, t.j.  $\gamma > 0$ ,  $\gamma \gg \omega \cdot \varepsilon$

$$k^2 = -j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu; \quad k = \sqrt{-j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu} = \frac{1-j}{a}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu}{2}} = \frac{1}{a}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon}} = \alpha = \frac{1}{a} \quad (29)$$

Zodpovedajúce vlnové rovnice pre vodivé prostredie sú

$$\nabla^2 \underline{H} - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \underline{H} = 0$$

$$\nabla^2 \underline{E} - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \underline{E} = 0 \quad (30)$$

Vo vodivom prostredí konštanta šírenia vlny je komplexným číslom, fázová konštanta a konštanta tlmenia sú si číselne rovné. Fyzikálne to znamená, že vodivé prostredie elektromagnetickú vlnu vždy utlmuje. Mierou utlmovania je veličina

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma \cdot \mu}} \quad [\text{m}] \quad (31)$$

ktorú sme získali z úprav konštánt (29) a ktorá sa nazýva **ekvivalentná hĺbka vniku EMV**. Všeobecne poskytuje predstavu o vplyve prostredia ( $\gamma$  a  $\mu$ ) a frekvencie zdroja EMP na jeho rozloženie v predmetnom vodivom prostredí. Rýchlosť šírenia a vlnová dĺžka EMV v tomto prostredí sú tiež funkciou hĺbky vniku, nakoľko

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \omega \cdot a = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot a; \quad \lambda = \frac{v}{f} = 2 \cdot \pi \cdot a \quad (32)$$

Čím je menšia hĺbka vniku EMV do vodivého prostredia, tým viac sa znižuje jej rýchlosť a vlnová dĺžka. Fyzikálne, hĺbka vniku odpovedá vzdialenosti od povrchu telesa, v ktorej sa dopadajúca rovinná elektromagnetická vlna utlmí na 95 % z intenzity na povrchu.

### Príklad 1

Vypočítajte hĺbku vniku elektromagnetickej vlny do medi pri frekvenciách 50 Hz, 500 Hz, 10 kHz, 100 kHz, 1 MHz a 10 MHz. Konduktivita (elektrická vodivosť) medi je  $6,43 \cdot 10^7$  S/m, relatívna permeabilita je rovná jednej. Aká je rezistencia (odpor) kruhového plného vodiča s priemerom 2 mm pri týchto frekvenciách v porovnaní s jeho odporom pri jednosmernom prúde?

Riešenie:

Pre hĺbku vniku platí vzťah:

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot f \cdot \gamma \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma \cdot 10^{-7}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} \cong \frac{0,0628}{\sqrt{f}}$$

Po dosadení dostaneme pre jednotlivé frekvencie tieto hodnoty:

Frekvencia [kHz]	0,05	0,5	10	100	1000	10000
Hĺbka vniku [mm]	8,87	2,81	0,628	0,198	0,0628	0,0198

Pre porovnanie odporu pri určitej a nulovej frekvencii vychádzame z fyzikálneho významu hĺbky vniku pre plochý vodič. V dôsledku skin efektu sa vodič správa tak, akoby prúd preteká s rovnomerne rozloženou hustotou prúdu vo vrstve hĺbky vniku  $a$ . Na valcový vodič to môžeme aplikovať len v prípade, že hĺbka vniku je podstatne menšia ako jeho polomer. Podľa predchádzajúcej tabuľky to môže byť približne splnené pri frekvencii 100 kHz. Pre vyššie frekvencie to platí presnejšie. Pomer odporov bude rovný prevrátenému pomeru plôch prierezov, ktorými preteká rovnomerne rozložený prúd

$$\frac{R}{R_0} = \frac{S_0}{S} \cong \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot a} = \frac{r}{2 \cdot a}$$

Hodnoty tohto pomeru uvádza nasledujúca tabuľka, pre frekvenciu 100 kHz je nutné túto hodnotu brať ako hrubý odhad, pretože podmienka  $r \gg a$  nie je splnená,  $r = 5 \cdot a$ .

Frekvencia [kHz]	100	1000	10000
$R/R_0$	2,5	8	25

Predchádzajúci vzorec pre pomer odporov počíta plochu medzikružia približne tým, že ju rozvinie na pás a predpokladá, že vznikne obdĺžnik. V skutočnosti je to však kosodĺžnik. Presná plocha medzikružia sa určí takto

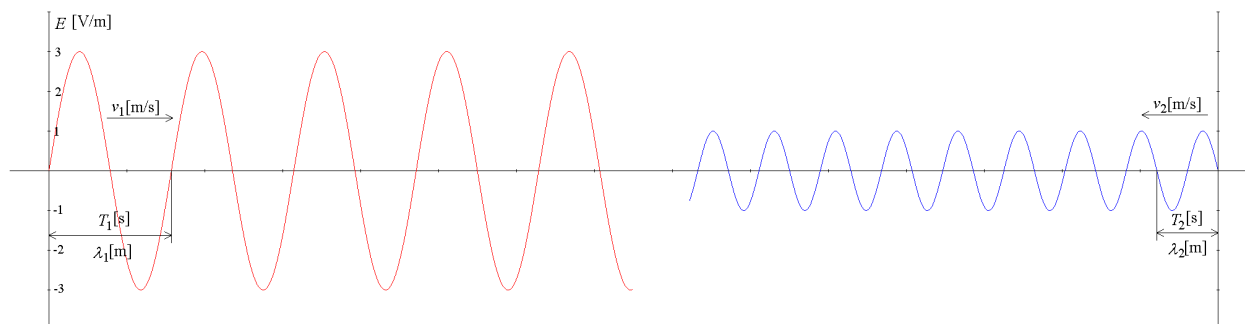
$$S = \pi \cdot [r^2 - (r - a)^2] = \pi \cdot [r^2 - (r^2 - 2 \cdot r \cdot a + a^2)] = \pi \cdot (r^2 - r^2 + 2 \cdot r \cdot a - a^2) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot a - \pi \cdot a^2 \cong 2 \cdot \pi \cdot r \cdot a$$

Posledný výraz platí pre  $r \cdot a \ll a^2$ , t.j.  $r \ll a$ . Počítať s presným prierezom je samozrejme zbytočné, pretože pre polomer porovnateľný s hĺbkou vniku nie je splnená počítačová podmienka, že prúd preteká s rovnomerne rozloženou hustotou prúdu len vo vrstve hĺbky vniku  $a$ .

### Príklad 2

Dve vysielačie antény vzdialené od seba 50 km vyslali v rovnakom čase signál. Prostredie medzi jednotlivými vysielačmi je tvorené vzduchom. Frekvencia EM žiarenia prvého vysielača je 900 MHz, druhého 1800 MHz. Maximálna hodnota amplitúdy elektrickej zložky žiarenia prvého vysielača je 3 V/m, druhého 1 V/m. Vypočítajte fázovú konštantu šírenia vlny, fázovú konštantu, merný útlm v danom prostredí, vlnovú dĺžku jednotlivých EM vln, rýchlosť šírenia jednotlivých EM vln, hĺbku vniku jednotlivých EM vln, okamžitú hodnotu intenzity elektrického poľa v čase interferencie vln, okamžitú hodnotu intenzity elektrického poľa v čase  $t = 10^{-6}$  s, počet periód jednotlivých vln v čase interferencie vln.

Riešenie:



Konštanta šírenia vlny:

$$k_1 = \omega_1 \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

$$k_1 = 2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 18,862 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_2 = \omega_2 \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} = 2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

$$k_2 = 2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 37,725 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

Fázová konštanta a merný útlm:

Keďže sa jedná o nevodivé prostredie, v ktorom konduktivita prostredia  $\gamma = 0$ , potom platí:

$$\alpha_1 = k_1 = 18,862 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}; \quad \beta_1 = 0$$

$$\alpha_2 = k_2 = 37,725 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}; \quad \beta_2 = 0$$

Dĺžka periódy jednotlivých vlnení:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{900 \cdot 10^6} = 1,111 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{1800 \cdot 10^6} = 5,555 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Rýchlosť šírenia sa jednotlivých vln:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{\omega_1}{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1}} = c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{\omega_2}{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1}} = c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vlnová dĺžka:

$$\lambda_1 = v_1 \cdot T_1 = \frac{v_1}{f_1} = \frac{\omega_1}{\alpha_1 \cdot f_1} = \frac{2 \cdot \pi}{\alpha_1} = 2,998 \cdot 10^8 \cdot 1,111 \cdot 10^{-9} = 0,333 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = v_2 \cdot T_2 = \frac{v_2}{f_2} = \frac{\omega_2}{\alpha_2 \cdot f_2} = \frac{2 \cdot \pi}{\alpha_2} = 2,998 \cdot 10^8 \cdot 5,555 \cdot 10^{-10} = 0,167 \text{ m}$$

Hĺbka vniku jednotlivých vln pri daných frekvenciách:

Keďže merný útlm oboch vlnení je v nevodivom prostredí rovný nule, vlna sa neutlmuje:

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega_1 \cdot \gamma \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot 0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}} = \lim \sqrt{\frac{2}{0}} = \infty \text{ m}$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{2}{\omega_2 \cdot \gamma \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot 0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}} = \lim \sqrt{\frac{2}{0}} = \infty \text{ m}$$

Čas, kedy dôjde k interferencii vln:

$$t_{\text{int}} = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{50 \cdot 10^3}{2,998 \cdot 10^8 + 2,998 \cdot 10^8} = 8,339 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Okamžitá hodnota intenzity elektrického poľa v čase interferencie vln (presnosť týchto výsledkov je v značnej miere závislá od predchádzajúceho zaokrúhľovania):

$$E_1(t_{\text{int}}) = E_{1\text{max}} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t_{\text{int}}) = E_{1\text{max}} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t_{\text{int}}) = 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot 8,339 \cdot 10^{-5}) = -1,955 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E_2(t_{\text{int}}) = E_{2\text{max}} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t_{\text{int}}) = E_{2\text{max}} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t_{\text{int}}) = 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot 8,339 \cdot 10^{-5}) = -0,989 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Okamžitá hodnotu intenzity elektrického poľa v čase  $t_v = 10^{-6} \text{ s}$ :

$$E_1(t_v) = E_{1\text{max}} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t_v) = 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 900 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}) = -2,896 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E_2(t_v) = E_{2\text{max}} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t_v) = 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 1800 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}) = 0,504 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Počet periód jednotlivých vln v čase interferencie vln:

$$n_1 = \frac{t_{\text{int}}}{T_1} = \frac{8,339 \cdot 10^{-5}}{1,111 \cdot 10^{-9}} = 75059 \quad \text{alebo} \quad n_1 = \frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{25000}{0,333} = 75075 \quad (\text{chyba zaokrúhľovania})$$

$$n_2 = \frac{t_{\text{int}}}{T_2} = \frac{8,339 \cdot 10^{-5}}{5,555 \cdot 10^{-10}} = 150117 \quad \text{alebo} \quad n_1 = \frac{s_1}{\lambda_1} = \frac{25000}{0,167} = 149701 \quad (\text{chyba zaokrúhľovania})$$

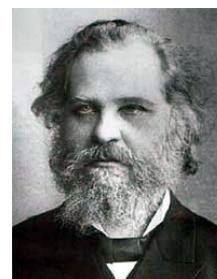


## 5 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE VO VODIVOM PROSTREDÍ

### Umovova teoréma a Umovov vektor

Ak budeme uvažovať také prostredie (neizolovanú termodynamickú sústavu), na hranici ktorého je možná výmena tepla všetkými troma spôsobmi a v dôsledku tejto dochádza k zmenám jednotlivých zložiek energie prostredia, zodpovedajúci nestacionárny dej vyjadruje diferenciálna rovnica v tvare

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_u + w_k + w_p + w_r) + \text{div}(\mathbf{q}_v + \mathbf{q}_k + \mathbf{q}_r) = q_z \quad [\text{W}\cdot\text{m}^{-3}] \quad (1)$$



Prvý člen rovnice vyjadruje časovú zmenu jednotlivých foriem energie v prostredí, vyjadrenú ich objemovými hustotami, menovite:

- hustotou vnútornej energie  $w_u = \rho \cdot c \cdot \vartheta \quad [\text{J}\cdot\text{m}^{-3}] \quad (2)$

- hustotou kinetickej energie  $w_k = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \quad (3)$

- hustotou potenciálnej energie  $w_p = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot w_{pi} \quad (4)$

- hustotou žiarivej energie  $w_r \quad [\text{J}\cdot\text{m}^{-3}]$

Druhý člen predstavuje toky energie do alebo z prostredia prenosom tepla vedením, prúdením a sálaním, vyjadrené ich hustotami.

Napokon tretí člen  $q_z \quad [\text{W}\cdot\text{m}^{-3}]$  je merný výkon vnútorného zdroja, ak taký v prostredí existuje.

Rovnica (1) teda vyjadruje energetickú bilanciu prostredia, ktoré je v interakcii s okolím (zákon o zachovaní energie v termodynamickej neizolovanej sústave): K časovej zmene jednotlivých foriem energie v objeme prostredia dochádza v dôsledku prenosu (tokov) energie formou tepla na hranici tohto prostredia s okolím, pri spoluúčasti vnútorného zdroja. Ak v prostredí neexistuje vnútorný zdroj, pravá strana rovnice sa prirodzene rovná nule. Pretože v rovnici sa vyskytujú rôzne možné formy energie a možné spôsoby jej prenosu, je univerzálnou a nazýva sa **všeobecná diferenciálna rovnica šírenia energie** v rôznych prostrediach.

### Diferenciálna rovnica pre prenos energie žiarením

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q}_r = 0 \quad (5)$$

čo je rovnica šírenia žiarivej energie pri termodynamickej rovnováhe.

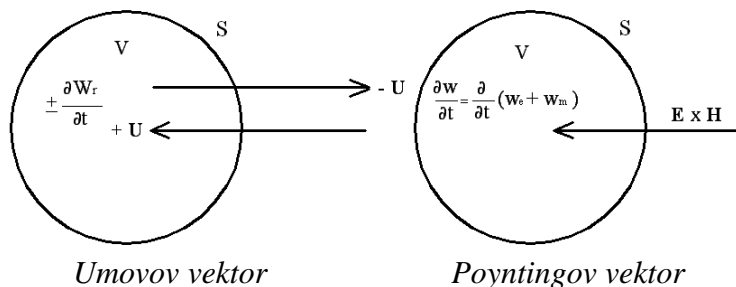
Po rozpísaní operátora divergencie podľa súradníc prostredia dostávame rovnicu

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} + \frac{\partial q_{r,x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{r,y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{r,z}}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

s fyzikálnym významom: V žiarivom prostredí vždy existujú tri funkcie  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  s vlastnosťou, že súčet ich prvých derivácií podľa súradníc  $x$ ,  $y$ ,  $z$  udáva zmenšenie hustoty energie v danom bode prostredia za jednotku času. Tieto funkcie predstavujú hustotu tokov energie. Túto teorému vyslovil ruský fyzik N. A. Umov v r. 1874 a vyjadruje vlastne zákon o zachovaní žiarivej (elektromagnetickej) energie. Voľne sa dá interpretovať tiež takto

(obrázok uvedený nižšie): Tokom (prítokom alebo výtokom) žiarivej energie cez uzavretý povrch s plochou  $S$  určitého prostredia o objeme  $V$ , dochádza k zmene energie častíc tohto prostredia (prírastku alebo úbytku). Ak energiu prostredia  $W_r$  znova vyjadríme jej objemovou hustotou a tok žiarivej energie vektorom jeho hustoty, matematické vyjadrenie Umovovej teóremy tiež bude:

$$\oint_S \mathbf{q}_r \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial W_r}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V w_r \cdot dV \quad (7)$$



Nakoľko pravá strana rovnice (7) fyzikálne znamená zmenu energie prostredia za jednotku času, predmetnej rovnici prináleží tiež tvrdenie, že tok energie prostredím sa rovná rýchlosti zmeny energie v tomto prostredí  $v_w$

$$\oint_S \mathbf{q}_r \cdot d\mathbf{S} = -\int_V v_w \cdot dV \quad (8)$$

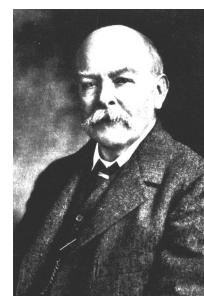
V rovniciach (7), resp. (8) vektor hustoty toku žiarivej energie  $\mathbf{q}_r$  je zvykom nazývať **Umovov vektor** a označuje sa  $\mathbf{U}$ . V diferenciálnom zápise má Umovova teórema tvar

$$\text{div } \mathbf{q}_r \equiv \text{div } \mathbf{U} = -\frac{\partial w_r}{\partial t} = -v_w \quad (9)$$

alebo jednoducho  $U = w_r \cdot v$ , čo tiež znamená, že Umovov vektor sa rovná súčinu objemovej hustoty žiarivej energie a rýchlosti jej prenosu  $v$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ]. Umovov vektor závisí vždy od vlastností prostredia a charakteru šírenia energie.

### Poyntingov žiarivý vektor

V teórii elektrických ohrevov je použiteľný Umovov vektor ako prostriedok k vyjadrovaniu prenosu energie elektromagnetického poľa a jej premeny na teplo v ohrievanom materiáli. Ak ľubovoľný materiál, elektricky vodivý alebo nevodivý, magnetický či nemagnetický, v pevnej alebo inej fáze podrobíme pôsobeniu elektromagnetického poľa, tok energie do materiálu ovplyvňujú veličiny, ktoré jednoznačne definujú pole. Takými veličinami sú elektrická a magnetická zložka intenzity elektromagnetického poľa.



Objemové hustoty energie od oboch zložiek elektromagnetického poľa sú:

- v stacionárnom elektrickom poli

$$w_e = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^2 \quad (10)$$

- v stacionárnom magnetickom poli

$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}^2 \quad (11)$$

Súčet rovníc určuje celkovú objemovú hustotu energie elektromagnetického poľa

$$w = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^2 + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}^2) \quad [\text{J}\cdot\text{m}^{-3}] \quad (12)$$

Ak túto rovnicu budeme aplikovať na nestacionárne pole, potom zodpovedajúce časové derivácie oboch zložiek energie poľa fyzikálne vyjadrujú ich zmenu, inými slovami je to prenos objemovej hustoty energie poľa za jednotku času

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (13)$$

Rovnicu (13) konkretizujeme na elektricky nevodivé prostredie ( $\gamma = 0$ ):

S využitím Maxwellových rovníc rovnica (13) sa jednoducho transformuje na tvar buď v diferenciálnom zápise

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (14)$$

alebo integrálnom (pre celý objem nevodivého prostredia)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \cdot dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (15)$$

Fyzikálna interpretácia ostatnej rovnice je: prírastok energie v objeme nevodivého prostredia za jednotku času sa rovná toku energie do tohto objemu cez obalovú plochu  $S$ , transportovanej v elektromagnetickej forme. Je to teda rovnica energetickej bilancie nevodivého prostredia, vyjadrená výkonmi. Hustotu toku energie charakterizuje vektorový súčin  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , ktorý do teórie elektromagnetického poľa zaviedol anglický fyzik John Poynting r. 1885. Nazýva sa **Poyntingov žiarivý vektor**. Ak porovnáme rovnicu (7) s rovnicou (15), resp. rovnicu (9) s (14) hneď zistíme, že sú identické. Znamená to, že Poyntingov žiarivý vektor je Umovov vektor, vyjadrovaný pomocou zložiek  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  intenzity aktuálneho elektromagnetického poľa. Teda pre nevodivé prostredie platí

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{U} = \mathbf{S}_N = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (16)$$

kde vektor  $\mathbf{S}_N$  má smer šírenia sa vlny. Keďže polia  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  sú navzájom na seba kolmé a v nevodivom prostredí sa šíria rýchlosťou svetla  $c$ , môžeme sa ľahko presvedčiť, že veľkosť vektora  $\mathbf{S}_N$  je (uplatnením vzťahu  $\mathbf{E} = c \cdot \mathbf{B}$  a  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$ )

$$|\mathbf{S}_N| = \frac{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|}{\mu_0} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} = c \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{c \cdot B^2}{\mu_0} = c \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 = \mathbf{S}_N \quad (17)$$

Tým, že sme Poyntingov žiarivý vektor odvodili pre nevodivé prostredie neznamená, že sa uplatňuje len pri tejto podmienke. Naopak, v súvislosti s elektroteplnou konverziou má zásadný význam aj pre vodivé prostredie, ako vhodný prostriedok pre vyjadrovanie prenosu energie elektromagnetického poľa do takého prostredia a tým aj generovania tepla v ňom.

### Príklad 1

Vo vrchných vrstvách atmosféry Zeme je stredná hodnota veľkosti Poyntingovho vektora  $\bar{\mathbf{S}}_N = 1,35 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Táto hodnota sa nazýva *solárna konštanta*.

- Aké sú veľkosti elektrického a magnetického poľa za predpokladu, že slnečné elektromagnetické žiarenie je rovinná sínusová vlna?
- Aký je celkový priemerný výkon vyžiarený Slnkom? Stredná vzdialenosť Zem-Slnko je  $r_0 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

Riešenie:

- a) Stredná hodnota Poyntingovho vektora súvisí s amplitúdou elektrického poľa podľa vzťahu

$$\bar{S}_N = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E_{\max}^2$$

Odkiaľ amplitúda elektrického poľa je

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \bar{S}_N}{c \cdot \epsilon_0}} = 1,01 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Zodpovedajúca veľkosť magnetického poľa je

$$B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

*Pozn.:* toto magnetické pole je menšie ako jedna desatina magnetického poľa Zeme.

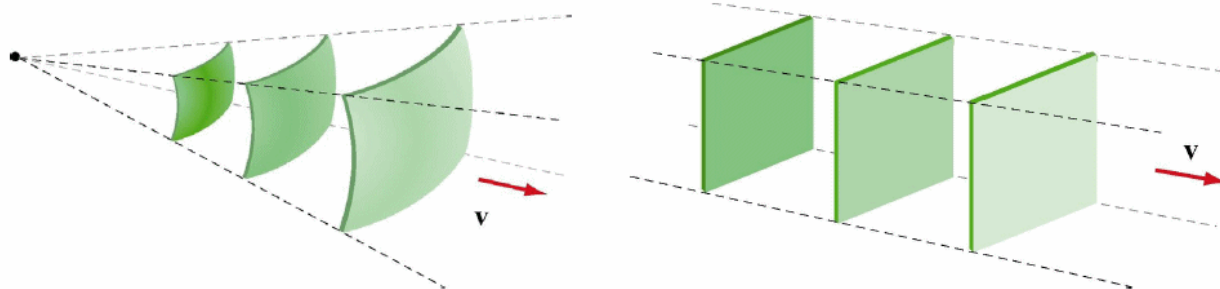
- b) Celková stredná hodnota výkonu vyžiareného Slnkom vo vzdialenosti  $r_0$  je

$$\bar{P} = \bar{S}_N \cdot S = \bar{S}_N \cdot (4 \cdot \pi \cdot r_0^2) = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Typ vlny, v tomto prípade, je sférická vlna (obr. vľavo). Táto vlna vychádza z „bodového“ zdroja. Intenzita vo vzdialenosti  $r$  od zdroja je

$$I = \bar{S}_N = \frac{\bar{P}}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

a klesá ako funkcia  $1/r^2$ . Naopak, intenzita rovinatej vlny (obr. vpravo) zostáva konštantná a nie sú tu žiadne straty energie.



### Príklad 2

Spočítajte intenzitu stojatej elektromagnetickej vlny danú vzťahom

$$E_y(x, t) = 2 \cdot E_{\max} \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad B_z(x, t) = 2 \cdot B_{\max} \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Riešenie:

Poyntingov vektor stojatej vlny je

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_N &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \cdot [2 \cdot E_{\max} \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \mathbf{j}] \times [2 \cdot B_{\max} \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathbf{k}] = \\ &= \frac{4 \cdot E_{\max} \cdot B_{\max}}{\mu_0} \cdot [\sin(k \cdot x) \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)] \cdot \mathbf{i} = \\ &= \frac{E_{\max} \cdot B_{\max}}{\mu_0} \cdot [\sin(2 \cdot k \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)] \cdot \mathbf{i} \end{aligned}$$

Časová stredná hodnota  $\bar{S}_N$  je

$$\bar{S}_N = \frac{E_{\max} \cdot B_{\max}}{\mu_0} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) = 0$$

Tento výsledok sme mohli očakávať, pretože stojatá vlna sa nešíri. Teda, energie, ktoré sú prenášané dvomi vlnami šíriacimi sa v opačných smeroch tak, že vytvoria stojaté vlny sa navzájom vrušia. To znamená, že nedochádza k prenosu energie.

**Príklad 3**

Predpokladajme, že elektrické pole rovinatej elektromagnetickej vlny je dané vzťahom

$$E(z,t) = E_{\max} \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t) \cdot \mathbf{i}$$

Určte nasledujúce hodnoty:

- a) Smer šírenia vlny.
- b) Z odpovedajúce magnetické pole  $\mathbf{B}$ .

*Riešenie:*

a) Po prepísaní argumentu funkcie kosínus  $(k \cdot z - \omega \cdot t) = k \cdot (z - c \cdot t)$ , kde  $\omega = c \cdot k$  vidíme, že smer šírenia vlny je  $+z$ .

b) Smer šírenia elektromagnetickej vlny je rovnaký ako smer Poyntingovho vektora, ktorý je daný  $\mathbf{S}_N = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$ . Navyše vieme, že polia  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  sú na seba navzájom kolmé. Teda  $\mathbf{E} = E(z,t) \cdot \mathbf{i}$  a  $\mathbf{S}_N = S_N \cdot \mathbf{k}$ . Potom bude  $\mathbf{B} = B(z,t) \cdot \mathbf{j}$ . Znamená to, že  $\mathbf{B}$  sa šíri v kladnom smere osi  $+y$ . Pretože  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  sú navzájom v rovnakej fáze, môžeme napísať

$$\mathbf{B}(z,t) = B_{\max} \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t) \cdot \mathbf{j}$$

K nájdeniu veľkosti  $\mathbf{B}$  použijeme Faradayov zákon:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

ktorý vedie k

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Z týchto rovníc dostaneme

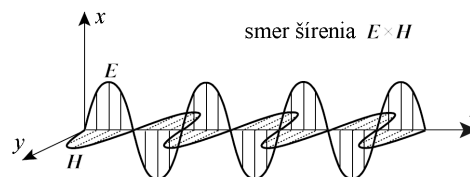
$$-E_{\max} \cdot k \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t) = -B_{\max} \cdot \omega \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t)$$

alebo

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \frac{\omega}{k} = c$$

Magnetické pole je teda dané vzťahom

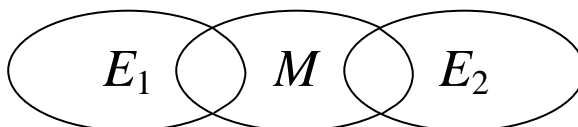
$$\mathbf{B}(z,t) = \left( \frac{E_{\max}}{c} \right) \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t) \cdot \mathbf{j}$$



## 6 ASYNCHRÓNNY MOTOR

### *Premena elektrickej energie na mechanickú prácu*

Každý elektrický stroj má tri samostatné obvody. Primárny elektrický obvod  $E_1$ , magnetický obvod  $M$  a sekundárny elektrický obvod  $E_2$ . Jednoduchou schémou na obr. 1 je znázornená väzba medzi elektrickými obvodmi  $E_1$  a  $E_2$  prostredníctvom magnetického  $M$ .



Obr. 1 Tri základné časti elektrického stroja

### *Princíp elektro-mechanickej premeny v asynchrónnom motore*

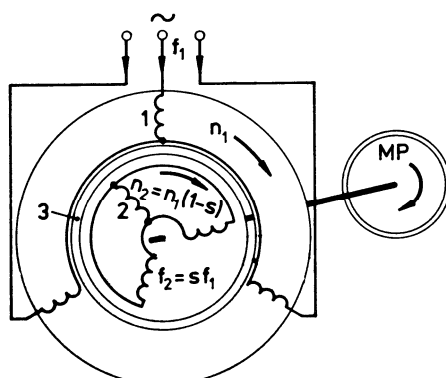
Činnosť asynchrónneho stroja vo funkcii motora je jednoduchá a dá sa vyjadriť nasledovne (pozri obr. 1). Trojfázové vinutie statora je pripojené na trojfázovú napájaciu sieť ( $E_1$ ). Cievkami pretekajúce prúdy s fázovým natočením o  $120^\circ$  vyvolávajú v magnetickom obvode ( $M$ ) magnetické pole, ktoré sa otáča tzv. synchronnými otáčkami  $n_1$ . Indukčné čiary magnetického poľa pretínajú vodiče oboch elektrických obvodov ( $E_1$  a  $E_2$ ) a teda indukujú v nich napätia. Indukované napätie v statorovom vinutí pôsobí proti indukujúcemu napätiu siete, čím vlastne obmedzuje statorové prúdy na hodnoty, pre ktoré je motor konštruovaný.

Indukované napätie v rotorovom vinutí ( $E_2$ ) vyvoláva v ňom prúd a pretože je pod vplyvom magnetického poľa, pôsobí na vinutie mechanická sila ako na každý prúdovodič v magnetickom poli. Vodiče rotorového vinutia sa začnú vychýľovať v smere otáčania magnetického poľa (Lenzov zákon).

Pri postupnom narastaní otáčok sa bude znižovať relatívny pohyb vodičov rotora voči poľu statora, spomalí sa časová zmena magnetického toku viazaného vodičmi, zníži sa teda indukované napätie aj prúd, čoho výsledkom je aj zníženie mechanickej sily pôsobiacej na vodiče. Dochádza k ustáleniu otáčok rotora pod hodnotu synchronných. Preto tento motor sa nazýva asynchrónny alebo indukčný. Indukčný preto, že jeho pôsobenie je založené na indukovaní napätia v rotore od magnetického poľa vyvolaného statorom. Z uvedeného popisu stručný výsledok sa dá vysloviť takto: elektrická energia dodávaná zo siete do statora sa prostredníctvom vytvoreného otáčavého magnetického poľa prenáša na rotor a z toho v mechanickej forme na hriadeľ poháňaného zariadenia. Elektrický stroj pracuje ako asynchrónny motor (s otáčkami menšími ako sú synchronne), na hriadeľi rotora sa generuje hnací točivý moment.

**Otáčavé magnetické pole, otáčky asynchrónneho motora**

Názornejšia elektromagnetická schéma trojfázového asynchrónneho stroja je na obr. 2.



Obr. 2 Schéma trojfázového asynchrónneho stroja

Magnetický obvod zložený z dynamoplechov sa skladá z dvoch súosých valcov. Vnútrný valec – rotor je upevnený na hriadeli a otáča sa v ložiskách vo vnútri vonkajšieho valca – statora.

Statorové vinutie 1 je rovnomerne rozložené v drážkach statora, s fázovým posunutím voči sebe o 120°. Rotorové vinutie 2 je buď trojfázové alebo viacfázové a v najjednoduchšom prípade je spojené nakrátko. Z dôvodu dobrej magnetickej väzby medzi statorom a rotorom vzduchová medzera 3 má byť čo najmenšia. Ako sme už naznačili, ak vinutie statora pripojíme k zdroju trojfázového prúdu, tento vytvára magnetické pole. Pri danej priestorovej konfigurácii cievok vinutia a vlastnostiach trojfázového zdroja prúdu vytvorené magnetické pole sa pohybuje presne tak, ako keby sme okolo osi otáčali permanentný magnet. Preto sa nazýva otáčavé magnetické pole. Otáčavé pole indukuje v rotorovom vinutí elektromotorické napätie, ktoré v uzavretom vinutí vyvoláva prúdy. Tieto spolu s otáčavým magnetickým poľom generujú elektromagnetické sily, ktoré otáčajú rotor v smere otáčania poľa.

Ak striedavým prúdom vybudené magnetické pole po obvode statora má jeden severný a jeden južný pól (počet pólov stroja je  $2p = 2$ , teda počet pólových dvojíc, resp. polpárov stroja je  $p = 1$ ), potom dobe jedného kmitu prúdu zodpovedá otočenie poľa o 360°. Ak je teda počet synchronných otáčok poľa za 1 minútu  $n_1$ , zodpovedajúca frekvencia je

$$f_1 = \frac{n_1}{60} \quad [\text{Hz}; \text{min}^{-1}] \quad (1)$$

čo je frekvencia statorového prúdu. Teda synchronne otáčky dvojpólového stroja pri sieťovej frekvencii 50 Hz sú

$$n_1 = 60 \cdot f_1 = 3000 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1} \quad (2)$$

Synchronne otáčky s viac pólovými dvojicami sú

$$n_1 = \frac{60 \cdot f_1}{p} \quad [\text{min}^{-1}] \quad (3)$$

Niektoré konkrétne hodnoty otáčok  $n_1$  pri sieťovej frekvencii  $f_1 = 50$  Hz a rôznom počte pólov stroja sú uvedené v nasledujúcej tabuľke

Počet pólov $2p$	Počet pólových dvojíc $p$	Synchronné otáčky	
		za sekundu ( $s^{-1}$ )	za minútu ( $\text{min}^{-1}$ )
2	1	50	3000
4	2	25	1500
6	3	16,67	1000
8	4	12,5	750
10	5	10	600
12	6	8,33	500

Ak v ustálenom stave otáčky rotora voči statoru označíme  $n_2$  [ $s^{-1}$ ], potom rozdiel

$$n_s = n_1 - n_2 \quad [s^{-1}] \quad (4)$$

definuje relatívne otáčky rotora voči otáčavému poľu statora. Nazývame ich **sklzové otáčky**. Sklzovým otáčkam zodpovedá frekvencia indukovaného napätia v rotorovom vinutí

$$f_2 = p \cdot n_s \quad [\text{Hz}; s^{-1}] \quad (5)$$

sklzové otáčky zároveň definujú tzv. **sklz asynchrónneho stroja** ako ich pomer k synchronným otáčkam

$$s = \frac{n_s}{n_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (6)$$

odkiaľ skutočné otáčky rotora za 1 minútu s využitím vzťahu (3) sú

$$n_2 = n_1 \cdot (1 - s) = \frac{60 \cdot f_1}{p} \cdot (1 - s) \quad [\text{min}^{-1}] \quad (7)$$

Pretože asynchrónne stroje pracujú so sklzom  $s \ll 1$ , zo vzťahu (7) vyplýva, že otáčky rotora sú blízke synchronným. Hodnoty sklzu sa pohybujú v priemere okolo 5 %, pri najmenších motoroch býva okolo 10 %, pri najväčších okolo 1 %.

Ak je rotorové vinutie spojené, rovnako ním tečie trojfázový prúd, analogicky vytvárajúci otáčavé magnetické pole. Pole sa vzhľadom na rotor točí sklzovými otáčkami

$$n_s = \frac{60 \cdot f_2}{p} \quad [\text{min}^{-1}] \quad (8)$$

a vzhľadom na stator otáčkami

$$n_1 = n_s + n_2 \quad [\text{min}^{-1}] \quad (9)$$

Synchronné otáčky sú teda súčtom sklzových otáčok a otáčok rotora, resp. inými slovami obidve otáčavé polia sa sčítavajú do výsledného, spoločného magnetického poľa, ktoré sa otáča synchronnými otáčkami  $n_1$ .

Ak ostatnú rovnicu vyjadríme pomocou frekvencií, dostaneme

$$\frac{60 \cdot f_1}{p} = \frac{60 \cdot f_2}{p} + n_2 \quad (10)$$

odkiaľ frekvencia rotora je

$$f_2 = f_1 - p \cdot \frac{n_2}{60} \quad [\text{Hz}; \text{min}^{-1}] \quad (11)$$

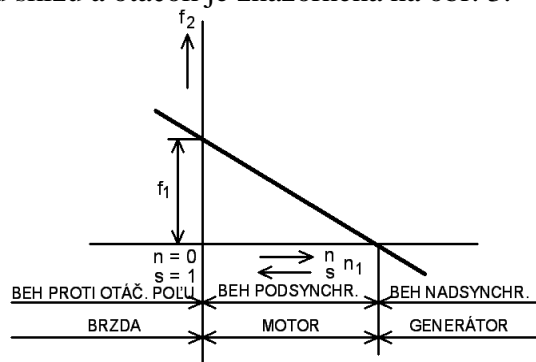
Pretože otáčky rotora  $n_2$  môžu byť kladné alebo záporné (kladné pri otáčaní rotora v smere poľa, záporné pri otáčaní proti smeru poľa), frekvencia rotora môže byť vyššia alebo nižšia ako frekvencia napájacej siete. Asynchrónny stroj teda môže pracovať ako menič frekvencie.

Napokon, z rovnice (6) využitím (3) a (8) vyplýva, že

$$s = \frac{f_2}{f_1} \quad \text{resp.} \quad f_2 = s \cdot f_1 \quad (12)$$



Závislosť frekvencie  $f_2$  od sklzu a otáčok je znázornená na obr. 3.

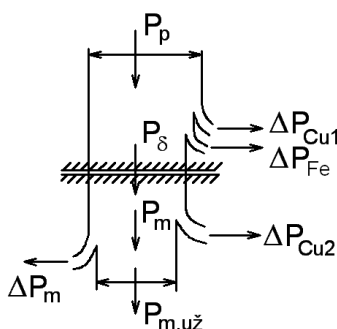


Obr. 3 Závislosť frekvencie rotora od sklzu a otáčok

Obr. 3 prehľadne znázorňuje tri základné prevádzkové stavy asynchrónneho stroja, t.j. vo funkcii motora, generátora a brzdy.

### Energetická bilancia a účinnosť asynchrónneho motora

Energetickú bilanciu asynchrónneho motora vyjadrenú pomocou výkonu prehľadne znázorňuje obr. 4.



Obr. 4 Rozdelenie elektrického príkonu asynchrónneho motora

V súlade s označením na obr. 4, rovnica energetickej (výkonovej) bilancie je

$$P_p = \Delta P_{Cu1} + \Delta P_{Fe} + \Delta P_{Cu2} + \Delta P_m + P_{m,už} \quad [W] \quad (13)$$

Jednotlivé položky znamenajú:

- $P_p$  je elektrický príkon motora, nakoľko je spotrebičom súmerne zaťažujúcim trojfázovú sieť, vyjadruje sa známym vzťahom

$$P_p = 3 \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 \quad (14)$$

pre fázové hodnoty napätia a prúdu statora  $U_1$ ,  $I_1$  a účinník  $\cos \varphi_1$ .

- Prúd statora v jeho vinutí s odporom  $R_1$  generuje elektrické straty

$$\Delta P_{Cu1} = 3 \cdot R_1 \cdot I_1^2 \quad (15)$$

- $\Delta P_{Fe}$  predstavuje straty v železe statora, pozostávajúce zo strát hysteréznych a vírivými prúdmi

$$\Delta P_{Fe} = \Delta P_h + \Delta P_v \quad (16)$$

Prostredníctvom otáčavého magnetického poľa na rotor sa teda prenáša výkon

$$P_\delta = P_p - \Delta P_{Cu1} - \Delta P_{Fe} \quad (17)$$

Nazýva sa **výkon vo vzduchovej medzere**, ktorý ak zanedbáme straty v železe rotora (sú malé) sa ďalej rozdeľuje na

- $\Delta P_{Cu2}$ , čo predstavuje elektrické straty vo vinutí rotora s odporom  $R_2$  a napr. výkon spotrebovaný spúšťačom, resp. regulátorom otáčok (odpor  $R_{sp}$ ). Teda

$$\Delta P_{Cu2} = 3 \cdot (R_2 + R_{sp}) \cdot I_2^2 \quad (18)$$

- a na mechanický výkon

$$P_m = P_\delta - \Delta P_{Cu2} \quad (19)$$

Ak od toho odčítame mechanické straty  $\Delta P_m$  (trenie v ložiskách, ventilácia, ...) dostávame koncový, mechanický užitočný výkon na hriadeli motora

$$P_{m,už} = P_m - \Delta P_m \quad (20)$$

Z naznačenej bilancie jednoducho stanovíme účinnosť asynchrónneho motora

$$\eta = \frac{P_{m,už}}{P_p} = \frac{P_p - (\Delta P_{Cu1} + \Delta P_{Fe} + \Delta P_{Cu2} + \Delta P_m)}{P_p} \quad (21)$$

Treba zdôrazniť, že vzťah (21) vyjadruje celkovú, teda energetickú účinnosť elektromotora. Ak by sme chceli vyjadriť elektrickú účinnosť, potom vo vzťahu treba vynechať mechanické straty  $\Delta P_m$ . Za normálneho stavu motora sú tieto podstatne menšie ako súčet  $\Delta P_{Cu1} + \Delta P_{Fe} + \Delta P_{Cu2}$ , takže v konečnom výsledku môžeme považovať pri elektromechanickej premene energetickú účinnosť za elektrickú. Hodnoty účinnosti asynchrónnych motorov sa pohybujú v rozsahu 75 až 93 %.

### **Krútiaci moment asynchrónneho stroja**

Medzi výkonom, otáčkami a krútiacim (točivým) momentom  $M$  platí všeobecný vzťah

$$P = \omega \cdot M = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot M \quad (22)$$

v ktorom  $n$  sú otáčky za 1 sekundu. Pre vyjadrenie momentu asynchrónneho stroja je rozhodujúci výkon vo vzduchovej medzere, ktorý sa prenáša magnetickým poľom s otáčkami  $n_1$ , teda v súlade s (22) platí konkrétne

$$P_\delta = 2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot M \quad [\text{W}; \text{s}^{-1}, \text{N}\cdot\text{m}] \quad (23)$$

Elektrický výkon rotora sa prirodzene musí prenášať rovnakým momentom, ale inými otáčkami. Sú to otáčky poľa voči rotoru, t.j. sklzové  $n_s$ . Preto elektrický výkon v rotore (18) spotrebovaný formou strát je tiež ich funkciou:

$$\Delta P_{Cu2} = 2 \cdot \pi \cdot n_s \cdot M = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot n_1 \cdot M = s \cdot P_\delta \quad (24)$$

Zvyšok elektrického výkonu rotora je celkový mechanický výkon na hriadeli motora (19), s otáčkami  $n_2$ :

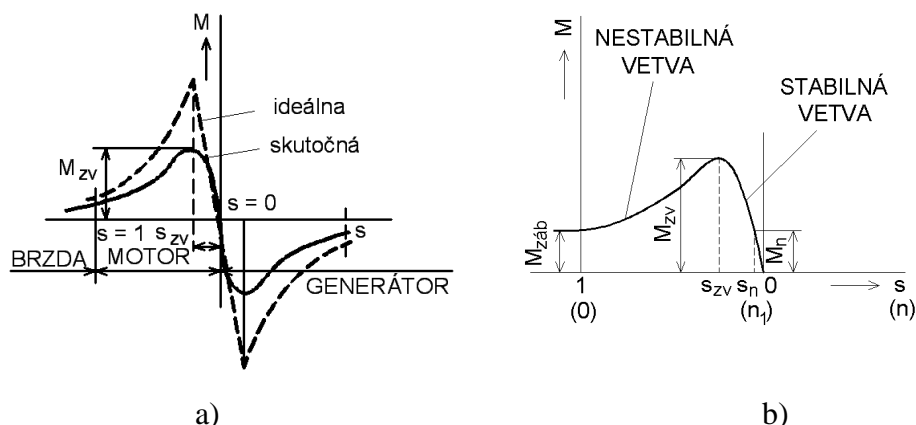
$$P_m = 2 \cdot \pi \cdot n_2 \cdot M = 2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot (1-s) \cdot M = (1-s) \cdot P_\delta \quad (25)$$

Z ostatných dvoch rovníc a rovnice (19) napokon dostaneme

$$P_\delta = P_m + \Delta P_{Cu2} = (1-s) \cdot P_\delta + s \cdot P_\delta \quad (26)$$

čo znamená, že rozdelenie výkonu vo vzduchovej medzere na mechanický a elektrický (na krytie strát  $\Delta P_{Cu2}$ ) závisí od sklzu. Sklz asynchrónneho stroja má byť preto čo najmenší.

Výpočet veľkosti krútiaceho momentu asynchrónneho stroja sa robí podľa vzťahu (23), v ktorom výkon vo vzduchovej medzere  $P_\delta$  sa vypočítava z elektrických hodnôt náhradnej schémy stroja. Ich vzájomnú súvislosť vyjadruje momentová charakteristika. Na obr. 5a je znázornená predmetná charakteristika asynchrónneho stroja.



Obr. 5 Závislosť momentu od sklzu: a) asynchrónneho stroja b) asynchrónneho motora

Podobne ako z priebehu funkcie  $f_2 = f(s)$  (obr. 3) aj z obr. 5 vyplývajú 3 prevádzkové stavy asynchrónneho stroja. V rozsahu sklzu  $0 < s < 1$  pracuje v podsynchronnom stave, teda vo funkcii motora. Motor nemôže dosiahnuť synchronné otáčky ( $s = 0$ ), pretože v tomto stave relatívny pohyb rotora voči poľu by bol nulový, v jeho vodičoch by sa neindukovalo napätie, vodičmi by netiekol prúd, teda nepôsobila by ani mechanická sila, ktorá vyvoláva na hriadeli točivý moment. Vo funkcii generátora asynchrónny stroj bude pracovať vtedy, ak na rotor privedieme mechanickú energiu prostredníctvom pohonného stroja, ktorým sa rotor bude otáčať nadsynchronnými otáčkami ( $n_2 > n_1$ ;  $s < 0$ ). Mechanická energia rotora sa prostredníctvom magnetického poľa (elektromagnetickou indukciou) mení v statorovom vinutí na elektrickú formu, odkiaľ sa prenáša do siete. V porovnaní s motorom v generátore dochádza k zmene smeru toku energie, čo vyžaduje zmenu zmyslu relatívneho pohybu vodičov rotora voči točivému poľu. To sa práve dosahuje nadsynchronnými otáčkami asynchrónneho stroja (zmenou znamienka sklzu), ktorý v tomto stave vyvíja generátorový (brzdny točivý moment). Túto dvojsmernú premenu zúčastnených foriem premeny energie označujeme ako **princíp vratnosti elektrického stroja**.

Napokon tretí základný prevádzkový stav asynchrónneho stroja je vo funkcii brzdy. Nastáva vtedy, ak sa bremenom, ktoré treba brzdiť vnúti stroju otáčky proti zmyslu točivého poľa. Potom stroj vyvíja brzdny moment. V tomto stave je sklz  $s > 1$  a otáčky rotora  $n_2$  sú „záporné“ (opačný smer voči  $n_1$ ).

Charakteristické body momentovej charakteristiky stroja pre stav motora sú naznačené na obr. 5b. V stave pokoja rotora ( $s = 1$ ) stroj vyvíja záberový moment  $M_{zab}$ , ktorý má veľkosť 1 až 2,5-násobku menovitého momentu  $M_n$ . S týmto momentom sa motor rozbieha, otáčky  $n_2$  sa zvyšujú, sklz klesá, moment rastie do hodnoty zvratu  $M_{zv}$ , čo je maximálny moment motora. Táto časť momentovej charakteristiky je nestabilná a prevádzka motora nežiaduca. Je to preto, že so zvýšením záťaže na hriadeli motora sa znížia otáčky  $n_2$ , zvýši sklz, točivý moment klesá, až sa motor môže zastaviť. Stabilnou časťou charakteristiky je oblasť sklzu v hraniciach  $s \in \langle s_{zv}; 0 \rangle$ , v ktorej sa nachádza hodnota nominálneho momentu  $M_n$ . V hraniciach tejto vetvy charakteristiky s nárastom sklzu (poklesom  $n_2$  zvýšenou záťažou na hriadeli), točivý moment rastie a motor sa nezastaví. Pomer momentu zvratu a nominálneho momentu sa nazýva momentová preťažiteľnosť, ktorá sa pohybuje okolo hodnoty 2.

### Príklad 1

Asynchrónny trojfázový, štvorpólový ( $2p = 4$ ) motor je pripojený na sieť s frekvenciou  $f_1 = 50$  Hz. Určite synchronné otáčky točivého magnetického poľa statora  $n_1$  ( $\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}$ ), sklz rotora  $s$ , frekvenciu indukovaného rotorového prúdu  $f_2$  a mechanickú uhlovú rýchlosť rotora  $\omega$ , pokiaľ otáčky rotora  $n = 1440$   $\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}$ .

Riešenie:

$$n_1 = \frac{60 \cdot f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1500 - 1440}{1500} = 0,04 \Rightarrow 4 \%$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1440}{60} = 150,8 \text{ s}^{-1}$$

$$f_2 = f_1 \cdot s = 50 \cdot 0,04 = 2 \text{ Hz}$$

### Príklad 2

Asynchrónny trojfázový motor na napätie  $U_s = 400 \text{ V}$ ,  $f_1 = 50 \text{ Hz}$ , má satorové vinutie zapojené do hviezdy, výkon  $P = 7,5 \text{ kW}$ , nominálne otáčky  $n = 1455 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ , účinnosť pri rešpektovaní všetkých strát  $\eta = 86 \%$  a účinník  $\cos \varphi = 0,88$ . Určite počet pólov ( $2p$ ) motora, sklz rotora  $s$ , príkon  $P_p$ , prúd  $I_1$  a točivý moment  $M$ .

Riešenie:

Najbližšie vyššie synchronne otáčky točivého magnetického poľa statora  $n_1$ , vzhľadom k otáčkam rotora  $n = 1455 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ , musia vyhovovať rovnici

$$n_1 = \frac{60 \cdot f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{motor je štvorpólový } 2p = 4$$

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1500 - 1455}{1500} = 0,03 \Rightarrow 3 \%$$

$$P_p = \frac{P}{\eta} = \frac{7500}{0,86} = 8721 \text{ W}$$

Pri zapojení satorového vinutia do hviezdy, vypočítame prúd podľa vzťahu:

$$I_1 = \frac{P_p}{\sqrt{3} \cdot U_s \cdot \cos \varphi} = \frac{8721}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 0,88} = 14,3 \text{ A}$$

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}} = \frac{7500}{\frac{2 \cdot \pi \cdot 1455}{60}} = 49,22 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### Príklad 3

Asynchrónny trojfázový, dvojpólový motor je napájaný z frekvenčného meniča  $f_1 = 60 \text{ Hz}$ . Určite výkon motora a Jouleove straty vo vinutí rotora  $\Delta P_{j2}$ , pokiaľ má príkon  $P_p = 2400 \text{ kW}$  a otáčky  $n = 3456 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$ .

Riešenie:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{3600 - 3456}{3600} = 0,04 \Rightarrow 4 \%$$

$$n_1 = \frac{60 \cdot f_1}{p} = \frac{60 \cdot 60}{1} = 3600 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$P = (1 - s) \cdot P_p = (1 - 0,04) \cdot 2400 = 2304 \text{ W}$$

$$\Delta P_{j2} = s \cdot P_p = 0,04 \cdot 2400 = 96 \text{ W}$$

**Príklad 4**

Asynchrónny trojfázový osempólový motor, ktorý je napájaný z frekvenčného meniča  $f_1 = 40$  Hz má otáčky  $n = 570$  ot·min<sup>-1</sup>. Určite synchronne otáčky točivého magnetického poľa statora  $n_1$ , sklz  $s$ , výkon  $P$ , Jouleove straty vo vinutí rotora  $\Delta P_{j2}$  a účinnosť  $\eta$ , ak motor vykazuje točivý moment  $M = 60$  N·m.

Riešenie:

$$n_1 = \frac{60 \cdot f_1}{p} = \frac{60 \cdot 40}{4} = 600 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{600 - 570}{600} = 0,05 \Rightarrow 5 \%$$

$$P = M \cdot \omega = 60 \cdot \frac{\pi}{30} \cdot 570 = 3581,4 \text{ W}$$

$$P = (1 - s) \cdot P_p \quad \Rightarrow \quad P_p = \frac{P}{1 - s} = \frac{3581,4}{1 - 0,05} = 3769,9 \text{ W}$$

$$\Delta P_{j2} = s \cdot P_p = 0,05 \cdot 3769,9 = 188,5 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{P}{P_p} = 1 - s = 1 - 0,05 = 0,95$$

**Príklad 5**

Asynchrónny trojfázový, štvorpólový motor má pri uvažovanom zaťažení príkon  $P_p = 565$  W, frekvenciu rotorového prúdu  $f_2 = 1,5$  Hz a sklz  $s = 0,05$ . Určite frekvenciu napätia napájacieho zdroja  $f_1$ , otáčky  $n$ , straty  $\Delta P_{j2}$ , výkon  $P$  a točivý moment motora  $M$ .

Riešenie:

$$f_2 = s \cdot f_1 \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{f_2}{s} = \frac{1,5}{0,05} = 30 \text{ Hz}$$

$$n_1 = \frac{60 \cdot f_1}{p} = \frac{60 \cdot 30}{2} = 900 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \Rightarrow \quad n = n_1 \cdot (1 - s) = 900 \cdot (1 - 0,05) = 855 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\Delta P_{j2} = s \cdot P_p = 0,05 \cdot 565 = 28,25 \text{ W}$$

$$P = (1 - s) \cdot P_p = (1 - 0,05) \cdot 565 = 536,75 \text{ W}$$

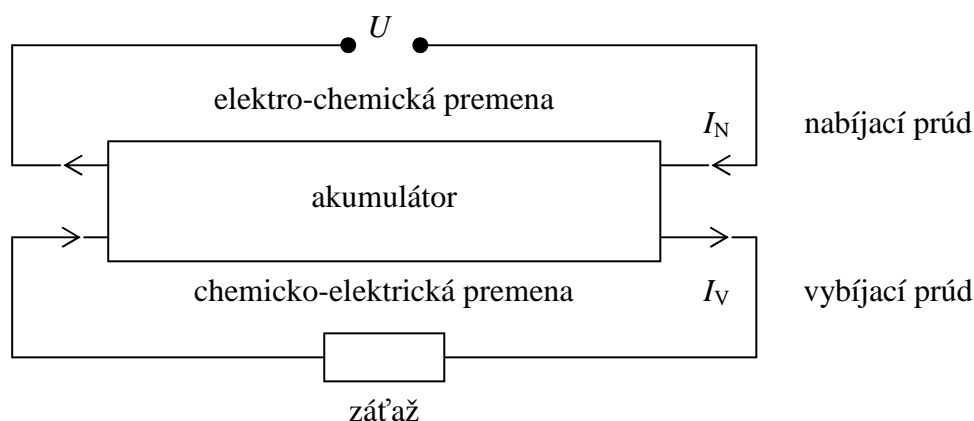
$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}} = \frac{536,75}{\frac{2 \cdot \pi \cdot 855}{60}} \cong 6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

## 7 PREMENA ELEKTRICKEJ ENERGIE NA CHEMICKÚ ENERGIU

Premeny elektrickej energie na chemickú formu uskutočňujú prostredníctvom konverzných systémov, ktoré sa nazývajú:

- **elektrolyzéry** – premena elektro-chemická
- **galvanické články** – premena chemicko-elektrická

**Elektrický akumulátor** je reverzibilný zdroj jednosmerného prúdu. O režime akumulátora ako konverzného prvku rozhoduje smer prúdu, pretekaného v uzavretom elektrickom obvode (obr. 1)



Obr. 1 Pracovné režimy akumulátora

Objavy princípov elektrochemických dejov patria medzi najstaršie a spadajú do obdobia konca 18. storočia a 1. polovice 19. storočia (Galvani, Volta, Faraday).

### Základné pojmy

**Elektrolyty** sú vodiče 2. triedy, pri ktorých prechodom prúdu sa ich fyzikálne vlastnosti a chemické zloženie menia (niektoré roztoky kyselín, zásad a solí kovov).

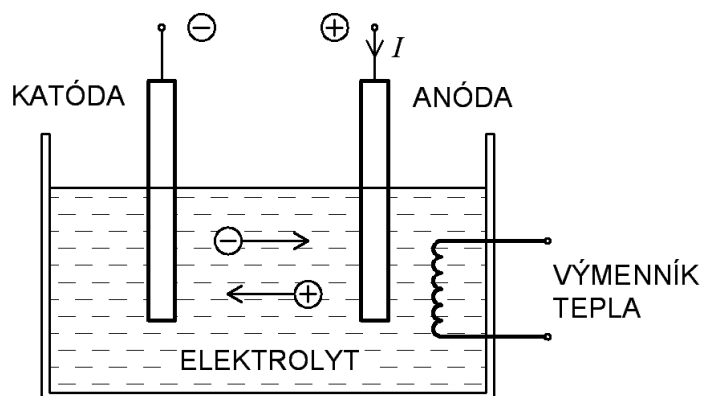
**Disociácia** – je proces rozpadu molekúl elektrolytu (molekuly elektrolytu v kvapalných rozpúšťadlách sa štiepia na kladné a záporné ióny).

Ak taký roztok elektrolytu cez systém elektród pripojíme na zdroj jednosmerného prúdu, vplyvom pôsobenia vytvoreného elektrického poľa jednotlivé ióny sa začnú pohybovať k elektródam s opačnou polaritou a na ich povrchu vylučovať.

**Elektrolýza** – je elektrochemický proces, pri ktorom vplyvom pôsobenia elektrického poľa (systém elektród pripojený na zdroj jednosmerného prúdu) sa začnú pohybovať jednotlivé ióny z roztoku elektrolytu k elektródam s opačnou polaritou a začnú sa na ich povrchu vylučovať. Uskutočňuje sa v elektrolyzéri, elektrolytickej vani minimálne s dvoma elektródami, **katódou** a **anódou**. Elektródy bývajú kovové alebo uhlíkové.

**Elektrolýzér** – zariadenie v ktorom sa uskutočňuje elektrolýza.

Medzi elektrolyty patria aj niektoré tuhé látky, ktoré sa roztavením prevedú do tekutého stavu. Ak roztavenie látky sa robí za účelom zmeny chemickej kvality, proces sa nazýva **termická elektrolýza** alebo elektrolýza tavením. Princíp elektrolýzy, resp. termickej elektrolýzy je naznačený na obr. 2.



Obr. 2 Princíp elektrolýzy

**Elektrolytická disociácia** alebo disociácia elektrolytu v roztoku je proces vzniku voľných iónov v roztoku elektrolytu, schopných sprostredkovať vedenie elektrického prúdu v tomto roztoku.

Vedenie elektrického prúdu roztokom alebo taveninou elektrolytu sprostredkováva usmernený pohyb kladných a záporných iónov v prítomnom elektrickom poli. Ión nesúci kladný elektrický náboj sa nazýva **katión**, teda v jednosmernom elektrickom poli sa bude pohybovať ku elektróde so záporným potenciálom, t.j. katóde. Naopak, ión, ktorý je nosičom záporného náboja sa nazýva **anión**. V tom istom poli sa pohybuje k elektróde s kladným potenciálom, t.j. **anóde**.

Náboj katiónu, resp. aniónu je vždy celistvým násobkom elementárneho náboja, ktorý zároveň udáva jeho mocenstvo. **Mocenstvo iónu** je celé kladné alebo záporné číslo vyjadrené podielom náboja iónu a elementárneho náboja  $e = +1,602 \cdot 10^{-19}$  C. Vyjadruje sa vzťahom

$$z = \frac{q}{e} \quad (1)$$

kde  $q$  je náboj iónu. Ióny teda môžu byť kladné jednomocné ( $q = e$ ), kladné dvojmocné ( $q = 2 \cdot e$ ), záporné jednomocné ( $q = -e$ ), záporné dvojmocné ( $q = -2 \cdot e$ ) atď.

### Faradayove zákony elektrolýzy

Zásadný význam v celej elektrochémii majú zákony, ktoré formuloval M. Faraday už v 1. polovici 19. storočia. Vyjadrujú kvantitatívny vzťah medzi elektrickým nábojom prechádzajúcim elektrolytom a chemickými účinkami, ktoré vyvolal.

Na zopakovanie:

- **látkové množstvo** – je to množstvo chemicky rovnorodej látky vyjadrené počtom elementárnych jedincov (atómov, iónov, molekúl, elektrónov, príp. iných častíc). Jednotkou látkového množstva je mól [mol] – čo je látkové množstvo sústavy, ktorá obsahuje práve toľko elementárnych jedincov, koľko je atómov v 0,012 kilograme uhlíka.

Látkové množstvo sa stanovuje z podielu hmotnosti [kg] a mólovej hmotnosti látky [ $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ]

$$n = \frac{m}{M} \quad [\text{mol}] \quad (2)$$

- **mólová hmotnosť** (resp. molárna hmotnosť látky) – je hmotnosť jedného mólu danej látky. Zo vzťahu (2) vyplýva, že

$$M = \frac{m}{n} \quad [\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}] \quad (3)$$

M. Faradayom formulované dva základné zákony elektrolýzy boli zistené experimentálne a patria medzi nemnohé empirické zákony, ktoré platia presne. Znejú:

**1. Faradayov zákon** – množstvo látky  $m$  [kg] vylúčenej alebo chemicky pozmenenej na elektróde je úmerné veľkosti náboja preneseného iónmi pri elektrolýze, t.j. matematicky

$$m = A \cdot Q = A \cdot \int_0^t I \cdot dt \quad [\text{kg}] \quad (4)$$

kde  $Q$  je náboj, ktorý prešiel roztokom elektrolytu [C]  
 $A$  je konštanta, ktorá sa číselne rovná množstvu látky, ktoré sa vylúči, keď roztokom elektrolytu prejde náboj 1 C. Nazýva sa **elektrochemický ekvivalent látky** [kg·C<sup>-1</sup>]

Voľne interpretované, podľa 1. Faradayovho zákona rovnaký **elektrický náboj vylúči alebo chemicky pozmení na elektróde vždy rovnaké množstvo tej istej látky.**

**2. Faradayov zákon** – rovnaký elektrický náboj vylúči z roztoku rôznych látok také množstvá, ktoré sú úmerné ich mólovým hmotnostiam. Ak má náboj veľkosť 1 C, potom podľa 1. zákona množstvo vylúčenej látky sa rovná jej elektrochemickému ekvivalentu  $A$ .

$$A = k \cdot M \quad [\text{kg} \cdot \text{C}^{-1}] \quad (5)$$

kde  $k$  je konštanta úmernosti [mol·C<sup>-1</sup>]

Dosadením (5) do (4) dostaneme všeobecný (zjednotený) Faradayov zákon

$$m = k \cdot M \cdot Q \quad (6)$$

z ktorého vyplýva, že na vylúčenie mólovej hmotnosti ľubovoľnej látky ( $m = M$ ) sa spotrebuje vždy rovnaké množstvo náboja  $Q_0 = 1/k$ . Toto množstvo elektrického náboja sa nazýva Faradayov náboj alebo Faradayova konštanta  $F$ . Z rovnice (6) s využitím (3) sa dá vypočítať veľkosť Faradayovho náboja

$$Q_0 = \frac{1}{k} = F = \frac{Q}{\frac{m}{M}} = \frac{Q}{n} = 96490 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} \quad (7)$$

Dosadením (7) do (6) dostaneme iný tvar všeobecného Faradayovho zákona

$$m = M \cdot \frac{Q}{F} = M \cdot \frac{I \cdot t}{F} \quad (8)$$

pri konštantnej intenzite elektrického prúdu  $I$ .

### **Prúdový a energetický výťažok procesov elektrolýzy**

V reálnych elektrolytických procesoch množstvá látok vylúčených na elektródach sú iné, ako vypočítané podľa 1. Faradayovho zákona (4). Odlišnosť nespočíva v nepresnosti zákona, ale je spôsobená tým, že na elektródach sa uskutočňujú aj ďalšie sekundárne procesy,



spotrebujúce časť dodávanej elektrickej energie. Táto skutočnosť sa vyjadruje účinnosťou primárneho procesu, ktorú pri elektrolýze zvykneme nazývať **prúdovým výťažkom**.

Je definovaný pomerom:

$$\eta_I = \eta_Q = \frac{Q_t}{Q_{sk}} = \frac{I_t}{I_{sk}} < 1 \quad (9)$$

v ktorom  $Q_t$ , resp.  $I_t$  je teoretická veľkosť náboja [C], resp. prúdu [A] vypočítaná podľa (4)

$Q_{sk}$ , resp.  $I_{sk}$  je skutočná veľkosť náboja, resp. prúdu, potrebná na vylúčenie rovnakej hmotnosti látky so zohľadnením prídavných procesov

S ohľadom na 1. Faradayov zákon (4) prúdový výťažok sa dá vyjadriť aj takto

$$\eta_Q = \eta_m = \frac{m_{sk}}{m_t} < 1 \quad (10)$$

čo znamená, že v skutočných procesoch na elektróde sa vylúči menej látky ( $m_{sk}$ ) v porovnaní s teoretickou hmotnosťou ( $m_t$ ). Takto stanovenú účinnosť primárneho procesu môžeme nazývať **hmotnostným (alebo materiálovým) výťažkom elektrolýzy**.

**Energetický výťažok**  $\eta_w$  vyjadruje celkovú energetickú účinnosť  $\eta_{en}$  procesu elektrolýzy a definuje sa podielom elektrickej energie  $W_t$ , ktorá je teoreticky potrebná k výrobe buď hmotnostnej jednotky čistého tuhého alebo kvapalného produktu (napr. 1 t) alebo objemovej jednotky čistého plynu (napr. 1 m<sup>3</sup>), meraných za normálnych podmienok a elektrickej energie  $W_{sk}$ , v skutočnosti pri tejto výrobe spotrebovanej. Teda

$$\eta_w = \eta_{en} = \frac{W_t}{W_{sk}} = \frac{Q_t}{Q_{sk}} \cdot \frac{U_t}{U_s} = \eta_I \cdot \eta_U < 1 \quad (11)$$

Ak  $\eta_I$  je prúdový výťažok podľa (9), potom rozdiel  $(1 - \eta_I)$  udáva, aký veľký podiel z celkového množstva vynaloženej elektriny (náboja) sa znehodnocuje vedľajšími elektrochemickými procesmi, chemickou rekombináciou a pod. Všeobecne prúdové výťažky na anóde a katóde nie sú pre vedľajšie procesy rovnako veľké. V praxi sa prúdový výťažok obyčajne vzťahuje len na primárny, hlavný produkt (pri zvolenom príklade buď na luh alebo chlór) podľa toho, ktorý je z hľadiska odbytu dôležitejší.

V ostatnej rovnici  $U_s$  označuje skutočne zmerané jednosmerné napätie na jednom elektrolyzéri vrátane úbytku na prívodoch a  $U_t$  je teoretická veľkosť napätia na danej sústave. Je totožná s tzv. **rovnovážnym napätím**, ktoré sa vypočíta buď z termodynamických údajov sústavy alebo z hodnôt elektródových potenciálov. Podiel  $U_t/U_s$  sa zvykne nazývať napäťovým výťažkom (v praxi ako hodnotiace kritérium sa používa málo). Rozdiel  $U_s - U_t$  je spôsobený polarizačnými dejmi na elektródach a ohmickým odporom elektrolytu, diafragmy, vodičov a spojov.

Za základné ukazovatele elektrolytickej výroby sa v praxi považujú:

- prúdové výťažky  $\eta_I$
- napätie na elektrolyzéri  $U_s$
- merná spotreba elektrickej energie [kWh·t<sup>-1</sup>, resp. kWh·m<sup>-3</sup>]

### **Priemyselné využitie elektrolýzy a energetická náročnosť elektrolytických procesov**

Ako sme už poznamenali v úvode kapitoly, elektrolytické procesy majú široké použitie, presahujúce rámec „vyslovene“ chemických technológií, do ktorých patrí najmä výroba rôznych anorganických látok. Elektrolýza sa intenzívne využíva aj v iných priemyselných odvetviach. V hutníctve, konkrétne v elektrometalurgii prostredníctvom tzv.

**hydrometalurgických technológií** sa vyrábajú rôzne kovy prítomné v roztokoch elektrolytov alebo sa rafinujú kovy predtým vyrobené bežným hutníckym (pyrometalurgickým) spôsobom. Elektrolyza je tiež výrobnou bázou **galvanotechniky**, používanej mimo iného v elektrotechnickom priemysle. Galvanizáciou sa rozumie pokovovanie povrchov nekovových alebo menej kvalitných kovových predmetov za účelom zlepšenia fyzikálno-chemických vlastností vrátane ochrany proti korózii. Pre priemysel každej krajiny je rovnako významná elektrolyza tavením. Na ilustráciu využitia elektrolyzy uvedieme niekoľko príkladov.

1. **Elektrolytická rafinácia kovov** – čo je elektrolyza vodných roztokov elektrolytov s využitím hydrometalurgických procesov. Je to veľmi rozšírený spôsob výroby čistých kovov, v ostatných rokoch až 80 %, takých kovov sa získava práve elektrolytickou rafináciou a nie z jednotlivých rúd. Typickým príkladom je elektrolytická rafinácia medi, pri ktorej sa z hutníckeho medziproduktu (tzv. čiernej medi) získava čistá elektrolytická meď s obsahom až 99,98 % Cu.

Elektrolyza prebieha v elektrolyzéri tégľového tvaru, elektrolytom je vodný roztok síranu meďnatého. Anóda je z hutníckej medi, katódou sú tenkostenné plechy z elektrolytickej medi. V priebehu elektrolyzy sa anóda rozpúšťa, na katóde sa vylučuje čistá meď. Hustota prúdu na katóde sa pohybuje v hraniciach 160 až 350 A·m<sup>-2</sup>. Čím je hustota prúdu menšia, tým kvalitnejšia je vylúčená elektrolytická meď a tým menšia je merná spotreba elektrickej energie. Býva 165 až 350 kWh.t<sup>-1</sup> vylúčenej medi. Prúdový výťažok je 0,9 až 0,98 %. Analogickou technológiou sa rafinuje tiež nikel, kobalt, olovo, striebro, zlato a ďalšie kovy.

2. **Galvanizácia** – je elektrolytický proces, ktorý podľa účelu sa delí na galvanostégiu a galvanoplastiku.

**Galvanostégia** je galvanické pokovovanie povrchov menej kvalitných kovov, prípadne po špeciálnej úprave aj povrchov nekovových predmetov. Predmet, ktorý sa má pokovovať, tvorí katódu, anódou je spravidla doska z kovu, ktorým sa má pokovovať. Elektrolytom musí byť roztok kyseliny, zásady alebo soli tohto kovu. Hustota prúdu na katóde má byť relatívne malá, aby kov pokrýval predmet rovnomerne. Pohybuje sa v desiatkach A·m<sup>-2</sup>, len ojedinele je vyššia (napr. pri poniklovaní predmetov býva 300 A·m<sup>-2</sup>, pri pochromovaní okolo 150 A·m<sup>-2</sup>, ale pri postriebrovaní len 30 A·m<sup>-2</sup>). Galvanostégia sa bežne využíva v slaboprúdovej elektrotechnike, v zlatníctve, bižutérii, pri výrobe optických prístrojov a pod.

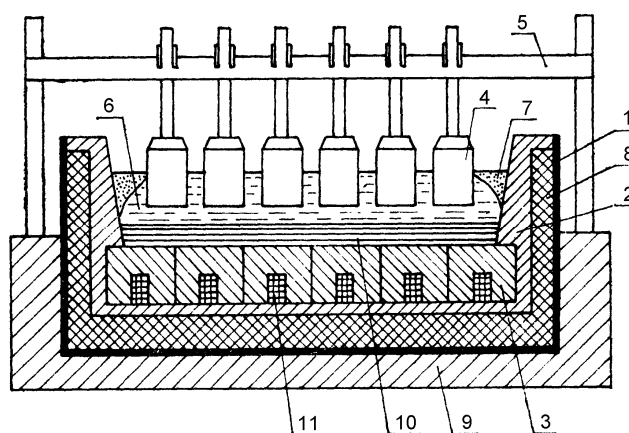
**Galvanoplastika** – je zhotovenie odliatkov rôznych predmetov elektrolytickou cestou. Napr. model zo sadry sa natrie tenkou vrstvou grafitu a s týmto vodivým povrchom sa ponorí do elektrolytu ako katóda. Na nej sa elektrolyticky vylúči potrebná vrstva žiadaného kovu, napr. medi. Anódou je v tomto prípade Cu-doska, elektrolytom roztok modrej skalice (CuSO<sub>4</sub>). Pri dostatočne hrubej vrstve medi na katóde, táto sa od nej odlúpne a tak dostaneme verný odliatok pôvodného modelu. Galvanoplastika sa využíva pri výrobe odliatkov gramofónových platní, drobných umeleckých predmetov a najmä v polygrafii na výrobu tlačových foriem.

3. **Elektrolyza tavenín** – je to druh elektrolyzy, pri ktorej elektrolytom je roztavený polotovar, soľ obsahujúca vyrábaný kov. Využíva sa pri výrobe elektronegatívnych (spravidla alkalických) kovov. Roztavené soli sú najmä rôzne fluoridy alebo chloridy. Príprava soli do roztaveného stavu a jej udržanie na teplote taveniny v elektrolyzéri sa zabezpečuje tým istým prúdom ako pre vlastný proces elektrolyzy. Preto túto elektrolyzu nazývame tiež **termickou elektrolyzou**. Termická elektrolyza je teda kombinácia tepelných a elektrochemických procesov. Pracovná teplota termickej elektrolyzy (roztavených solí) sa pohybuje v hraniciach 400 až 960 °C, výnimočne aj viac. Preto aj kov vylučovaný na katóde je spravidla v roztavenom stave. Termická elektrolyza sa využíva najmä v hutníctve, na výrobu kovového

sodíka, hliníka, horčíka, tiež lítia a fluóru. Energetická náročnosť týchto technológií patrí medzi najvyššie.

Termická elektrolyza sa najviac využíva pri **výrobe hliníka**. Elektrolytom je oxid hliníka  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (bauxit), s teplotou tavenia okolo  $2050\text{ }^\circ\text{C}$ . Ak sa ale rozpustí v roztavenom kryolite (čo je fluorid hlinito-sodnatý,  $\text{Na}_3\text{AlF}_6$ ), elektrolyza a vylučovanie hliníka prebieha už pri teplote okolo  $950$  až  $980\text{ }^\circ\text{C}$ . Koncentrácia  $\text{Al}_2\text{O}_3$  v roztavenom kryolite je 3 až 10 %.

Termický elektrolyzér na výrobu hliníka je znázornený na obr. 3. Tvorí ho oceľový plášť elektrolytickej vane (1), ktorá je uložená na betónovom základe (9). Na obmedzenie tepelných strát slúži šamotová výmurovka (8), zakrytá uhlíkovými blokmi (2) a pôdnymi katódami z grafitu (3). Spojenie katód so zdrojom jednosmerného prúdu zabezpečujú masívne prívody (11). Prívod prúdu na anódy (4) zabezpečujú prípojnice (5) z Cu-pásoviny. Anódy sú vertikálne a pohyblivé, aby sa dala nastavovať konštantná vzdialenosť medzi nimi a katódovou sústavou, nakoľko hrúbka vylúčenej hliníkovej vrstvy (10) sa v priebehu elektrolyzy zväčšuje. Normálne býva 100 až 150 mm. Anódy sú buď grafitové alebo tzv. samovypaľovacie na báze uhlíka (Söderbergerové elektródy), požadovanou časťou ponorené do elektrolytu (6). Po okrajoch vane (7) tento zvykne kôrkovať (tuhnúť v miestach s nižšou teplotou).



Obr. 3 Schéma termického elektrolyzéra na výrobu hliníka

Proces termoelektrolyzy hliníka prebieha pri napätí 4,5 až 5 V a hustote prúdu 8 až  $60\text{ kA}\cdot\text{m}^{-2}$ . Celkové napätie na sústave elektrolyzérov (zapojených do série) sa pohybuje okolo 250 až 700 V, celkový prúd prechádzajúci sústavou paralelne zapojených elektród v jednej vane dosahuje desiatky kA. Elektrická účinnosť je 0,8 až 0,9 energetická len okolo 0,3 (veľké tepelné straty). Merná spotreba elektrickej energie pri elektrolytickej výrobe hliníka býva 17500 až  $19500\text{ kWh}\cdot\text{t}^{-1}\text{ Al}$  a patrí medzi najvyššie.

Termickou elektrolyzou sa tiež vyrába **horčík**. Do šamotom vyloženej vane vyplnenej taveninou  $\text{MgCl}_2$  sú zapustené grafitové anódy a oceľové katódy. Priestor medzi katódami a anódami je rozdelený šamotovou diafragmou, chrániacou na katóde vylúčený horčík (zhromaždený na hladine taveniny elektrolytu) pred vplyvom plynného chlóru, anódového produktu. Pracovná teplota procesu je okolo  $720\text{ }^\circ\text{C}$ , napätie na jednom elektrolyzéri 7 až 8,5 V, merná spotreba elektrickej energie  $18000$  až  $26000\text{ kWh}\cdot\text{t}^{-1}$  horčíka.

Pri výrobe fluóru s kyslým fluoridom draselným  $\text{KF}\cdot\text{HF}$  ako elektrolytom je pracovná teplota asi  $250\text{ }^\circ\text{C}$ , merná spotreba elektrickej energie okolo  $12000\text{ kWh}\cdot\text{t}^{-1}$  fluóru. Ak je elektrolytom kyslý fluorid draselný v zložení  $\text{KF}\cdot 2\text{HF}$  pracovná teplota je  $75\text{ }^\circ\text{C}$  (resp.  $115\text{ }^\circ\text{C}$ ) a merná spotreba  $21000$  (resp.  $14000$ )  $\text{kWh}\cdot\text{t}^{-1}$  fluóru.

Energeticky najnáročnejšia je **termoelektrolyza lítia**. Je to elektrolyza  $\text{LiCl}_2$  v tavenine obsahujúcej 50 % hmotnostných jednotiek  $\text{LiCl}$  a 50 %  $\text{KCl}$ . Merná spotreba elektrickej

energie dosahuje 40000 až 60000 kWh·t<sup>-1</sup> lítia. Prevádzkové napätie je 8 až 13 V na jednom elektrolyzéri.

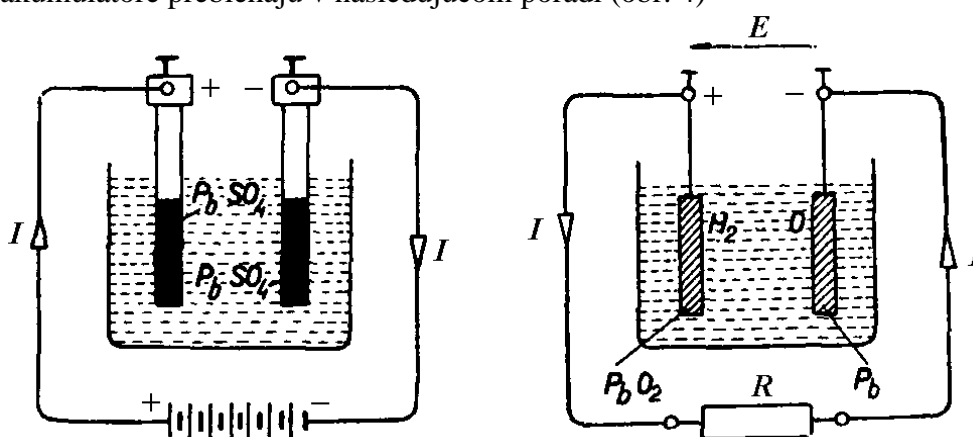
4. **Elektrolytické obrábanie kovov** – je to novodobý spôsob opracovania kovových súčiastok odoberaním materiálu elektrochemickým rozpúšťaním. Obrábací nástroj tvorí katódu, obrobok anódu, priestor medzi nimi sa intenzívne preplachuje elektrolytom. Vplyvom jednosmerného prúdu na katóde sa uvoľňujú vodíkové ióny, na anóde (obrobku) kov stráca elektróny, ktorých počet zodpovedá jeho mocenstvu. Tieto sa dostávajú do elektrolytu, reagujú s jeho zložkami a vytvárajú odpadové produkty. Rýchlosť obrábania závisí od hustoty prúdu, napr. pri elektrochemickom hĺbení býva do 100 A·cm<sup>-2</sup>, pri napätí 8 až 15 V. Hustota prúdu a rýchlosť obrábania je najväčšia v mieste najmenej vzdialenosti medzi elektródami. Tým sa prekopíruje tvar katódy do anódy, t.j. tvar nástroja do obrobku. Výhodou elektrochemického obrábania je vysoká produktivita a skutočnosť, že z nástrojovej elektródy neubúda, na obrobku nevzniká tepelne ovplyvnená vrstva.

Okrem elektrochemického hĺbenia ďalšími metódami obrábania je napr. elektrochemické leštenie, brúsenie, značkovanie, leptanie a ďalšie procesy.

### Princíp akumulátora

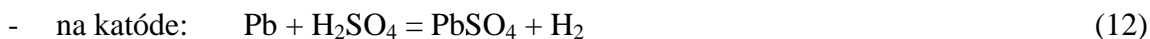
Akumulátor je reverzibilný zdroj jednosmerného prúdu, ktorého činnosť je založená na vratnosti elektrochemických procesoch v elektrolyze. Rozklad roztoku elektrolytu, ktorý vzniká pri určitom smere prúdu sa zastaví a nastáva reverzná zlučovanie opačne nabitých iónov, ak sa smer prúdu zmení. Ak má prúd taký smer, že pôsobí proti polarizačnému napätiu na elektródach, v sústave elektrolyt – elektródy sa mení elektrická energia na tepelnú, podobne ako pri elektrolyze. Akumulátor je elektrolyzér, chemickú energiu získava prostredníctvom nabíjacieho prúdu z vonkajšieho zdroja. Naopak, ak prúd elektrolytom je vyvolaný polarizačným napätím, v sústave prebieha inverzný proces, t.j. chemická energia sa mení na elektrickú. Akumulátor je vo funkcii galvanického článku, elektrická energia sa získava z „vnútorného“ zdroja prostredníctvom vybíjacieho prúdu, tečúceho obvodom záťaže.

Vratnosť elektrochemických procesov znázorníme na najbežnejšom type akumulátora, olovenom. Roztokom elektrolytu je riedená kyselina sírová, anódu tvorí doska z oxidu olovičitého (PbO<sub>2</sub>), katódou je doska z hubovitého olova (Pb). Elektrochemické procesy v tomto akumulátore prebiehajú v nasledujúcom poradí (obr. 4)



Obr. 4 Nabíjanie a vybíjanie akumulátora

- **stav pred nabíjaním** – pôsobením kyseliny sírovej obe elektródy sa pokrývajú vrstvou síranu olovnateho, čomu zodpovedajú stechiometrické rovnice:



t.j. uvoľnený vodík na katóde následne reaguje na anóde a vytvára dve molekuly vody. Obe elektródy sú chemicky rovnaké, akumulátor nevykazuje žiadne napätie

- **nabíjací proces** (obr. 4a) – pripojením vonkajšieho zdroja na svorky akumulátora (kladný pól na anódu  $\text{PbSO}_4$ , záporný na katódu  $\text{Pb}$ ), nabíjací prúd v elektrolyte uvoľňuje ióny  $\text{H}_2$ , ktoré sa vylúčia na katóde a ióny  $\text{SO}_4$ , vylučujúce sa anóde. Nabíjaciemu procesu zodpovedajú stechiometrické rovnice:



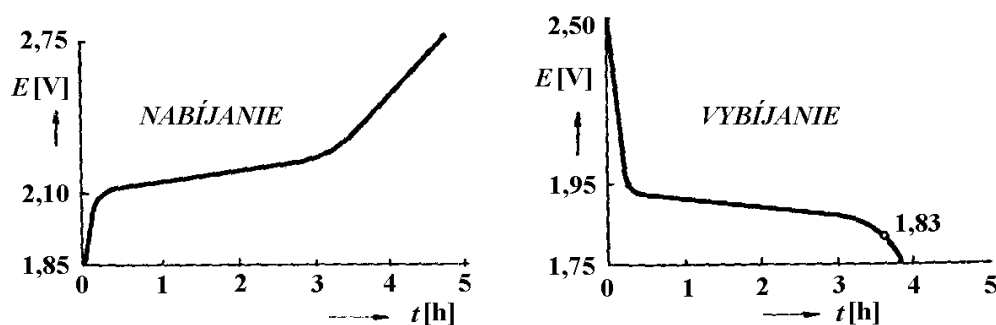
čo znamená, že rozkladom jednej molekuly kyseliny sírovej vznikajú tri nové molekuly rovnakého druhu, hustota kyseliny sírovej v roztoku elektrolytu stúpa. Pred nabíjaním chemicky rovnaké elektródy po nabití majú novú kvalitu, anódu z  $\text{PbO}_2$  a katódu z  $\text{Pb}$ . Vytvoril sa galvanický článok.

- **vybíjací proces** (obr. 4b) – ak na takto vytvorený galvanický článok pripojíme záťaž, preteká obvodom prúd opačného smeru, s rovnakým elektrochemickým účinkom, teda elektrolyt sa znova rozkladá na ióny  $\text{H}_2$  a  $\text{SO}_4$  (14). Stechiometrické rovnice vybíjania akumulátora sú:



Z dvoch molekúl  $\text{H}_2\text{SO}_4$  vznikajú dve molekuly vody, hustota elektrolytu klesá, elektródy nadobúdajú rovnakú chemickú povahu, akumulátor stráca napätie, dostáva sa do stavu pred nabíjaním. Aby znovu získal chemickú energiu musíme mu dodať elektrickú z vonkajšieho zdroja. Reverzibilný proces sa opakuje.

Na obr. 5 sú zobrazené nabíjacie a vybíjacie charakteristiky oloveného akumulátora. Napät'ové rozpätie medzi dvoma doskami akumulátora, ako elektrického zdroja, býva od 2 V do 1,83 V. Potom rýchlo klesá až k nule, preto po dosiahnutí spodnej hranice treba akumulátor znova nabíjať.



Obr. 5 Priebeh napätia počas nabíjania a vybíjania akumulátora

Počet dosiek akumulátora sa odvodzuje od požadovaného svorkového napätia.

Kvalita (výkonnosť) akumulátorov sa vyjadruje ich kapacitou, čo je množstvo elektrickej energie v ampérhodinách, ktoré akumulátor poskytuje bez toho, aby napätie pokleslo pod dovolenú hodnotu 1,83 V.

$$W_a = I \cdot t \quad [\text{Ah}] \quad (19)$$

Účinnosť akumulátorov sa spravidla určuje dvojako, buď pomerom

$$\eta_{\text{Ah}} = \frac{I_v \cdot t_v}{I_n \cdot t_n} \quad [-] \quad (20)$$

alebo

$$\eta_{\text{Wh}} = \frac{U_v \cdot I_v}{U_n \cdot I_n} \quad [-] \quad (21)$$

čo je ampérhodinová alebo watthodinová účinnosť (indexy „v“ sa vzťahujú na vybíjací proces, indexy „n“ na nabíjací). Nové akumulátory majú  $\eta_{\text{Ah}}$  okolo 90 % a  $\eta_{\text{Wh}}$  približne 70 až 75 %.

### Príklad 1

Aké množstvo elektrického náboja potrebujeme viesť roztokom  $\text{CuSO}_4$ , aby sa vylúčilo 3,32 g Cu?

Riešenie:

Podľa Faradayových zákonov sa nábojom 96490 Coulombov vylúči v prípade dvojmočnej medi  $\frac{1}{2}$  63,5 g.

Teda:

$$\begin{array}{l} 63,5 \text{ g Cu} \dots\dots\dots 2 \cdot 96490 \text{ C} \\ 3,32 \text{ g Cu} \dots\dots\dots x \\ x = \frac{2 \cdot 96490 \cdot 3,32}{63,5} = 10089,7 \text{ C} \end{array}$$

### Príklad 2

Koľko gramov Cu získame z roztoku  $\text{CuSO}_4$ , keď ním 20 minút prechádza prúd 5 A?

Riešenie:

Náboj je

$$Q = I \cdot t$$

Ak

$$I = 5 \text{ A}$$

$$t = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}$$

dostaneme

$$Q = I \cdot t = 5 \cdot 1200 = 6000 \text{ C}$$

Nábojom 96490 C sa získa 31,75 g Cu (viď **Príklad 1**).

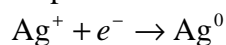
$$m = \frac{31,75 \cdot 6000}{96490} = 1,97 \text{ g Cu}$$

**Príklad 3**

Vedením prúdu roztokom striebornej soli sa na katóde za 10 minút vylúči 1 g Ag. Vypočítajte intenzitu prúdu!

*Riešenie:*

Na katóde prebieha reakcia:



$$t = 10 \text{ minút} = 600 \text{ s}$$

$$m_{\text{Ag}} = 1 \text{ g}$$

$$M_{\text{Ag}} = 107,87 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$F = 96490 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Potom platí:

$$m_{\text{Ag}} = \frac{M_{\text{Ag}} \cdot I \cdot t}{F}$$

vyjadríme intenzitu a dosadíme hodnoty:

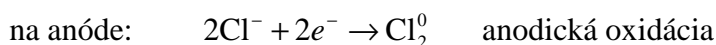
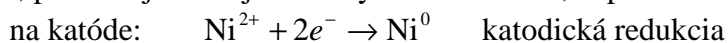
$$I = \frac{m_{\text{Ag}} \cdot F}{M_{\text{Ag}} \cdot t} = \frac{1 \text{ g} \cdot 96490}{107,87 \cdot 600} = 1,49 \text{ A}$$

**Príklad 4**

Roztokom NiCl<sub>2</sub> prechádzal prúd 2 A po dobu 3 hodín. Vypočítajte hmotnosť kovu, vylúčeného na katóde a objem plynu (za normálnych podmienok), vznikajúceho na anóde.

*Riešenie:*

Reakcie, prebiehajúce na jednotlivých elektródach, napíšeme rovnicami:

Podľa spojeného Faradayovho zákona  $m = \frac{A \cdot I \cdot t}{n \cdot F}$ , kde  $t = 3 \text{ hod} = 10800 \text{ s}$ 

$$m_{\text{Ni}} = \frac{58,71 \cdot 2 \cdot 10800}{2 \cdot 96490} = 6,571 \text{ g Ni}$$

$$m_{\text{Cl}_2} = \frac{(2 \cdot 35,45) \cdot 2 \cdot 10800}{2 \cdot 96490} = 7,936 \text{ g Cl}_2$$

Hmotnosť chlóru odpovedá objemu

$$V = \frac{V_0 \cdot m_{\text{Cl}_2}}{M_{\text{Cl}_2}} = \frac{22,42 \cdot 7,936}{70,9} = 2,51 \text{ dm}^3$$

**Príklad 5**

Koľko mg  $\text{AgNO}_3$  sa rozloží elektrickým množstvom náboja 1 Coulombu? [1,76 mg  $\text{AgNO}_3$ ]

**Príklad 6**

Pri elektrolýze roztoku  $\text{CuSO}_4$  sa na anóde vylúčilo 448 ml kyslíka za normálnych podmienok. Koľko  $\text{CuSO}_4$  sa rozložilo? [6,384 g  $\text{CuSO}_4$ ]

**Príklad 7**

Koľko Coulombov treba viesť roztokom striebornej soli, aby sa z roztoku vylúčil 1 gram striebra? [894,59 C]

**Príklad 8**

Koľko gramov niklu sa vylúči pri galvanickom pokovovaní, keď pokovovacím kúpeľom prejde 1600 coulombov? [0,4867 g Ni]



## 8 VÝPOČET ELEKTRICKEJ ŠPIRÁLY

**Výhrevné články**, sú najdôležitejším prvkom odporových pecí s nepriamym ohrevom. Výber materiálu, správne dimenzovanie, umiestnenie a prevádzkovanie výhrevných článkov vplyvajú na ich životnosť a zároveň na racionálnu prevádzku pece vrátane dodržiavania zvoleného tepelne-technologického režimu. Kvalita odporového materiálu sa posudzuje podľa tepelných vlastností, najmä dostatočnej žiaruvzdornosti pri pracovnej teplote, podľa mechanickej pevnosti, chemickej odolnosti proti pecnej atmosfére a najmä elektrických vlastností. Podľa ostatných kvalitný výhrevný článok má mať:

- vysokú rezistivitu
- malý teplotný súčiniteľ odporu
- časovú stálosť odporu

V prevádzkach nízko a strednoteplotných pecí sa osvedčili kovové výhrevné články na báze austenitických zliatin (Cr+Ni+Fe) a feritických zliatin (Cr+Al+Fe). Austenitické sú nemagnetické, povrchová vrstva  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  prispieva k žiaruvzdornosti materiálu a dobre odvádza teplo. Magnetické feritické zliatiny majú oxidovú vrstvu z  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , majú vyššiu rezistivitu, ale horšiu mechanickú pevnosť v porovnaní s austenitickými. Súčasný trh je zásobený dostatočným výberom týchto polotovarov s obchodnými názvami napr. CRONIX (aust.), CRONIFER (aust.), ALUCHROM (ferit) a najmä kvalitný KANTHAL (ferit) v rôznych modifikáciách. Ich maximálne pracovné teploty bývajú 1200 až 1350 °C.

Vysoko-teplotné pece sa osadzujú výhrevnými článkami na báze nekovov. Majú prirodzene vyššiu rezistivitu ako kovové, ale ťažšie sa spracovávajú. Preto sa distribuujú už ako hotové výrobky, najmä v tvare tyče alebo rúrky väčšieho prierezu. Materiálová báza týchto článkov je:

- karbid kremíka (SiC), pre pracovné teploty 1300 až 1500 °C, (napr. SILIT, GLOBAR, CRUSILITE)
- zmes molybdenitu kremičitého ( $\text{MoSi}_2$ ) a oxidu kremičitého ( $\text{SiO}_2$ ). Známe články na tejto báze sú MOSOLIT a najmä KANTHAL Super pre pracovnú teplotu do 1700 °C.

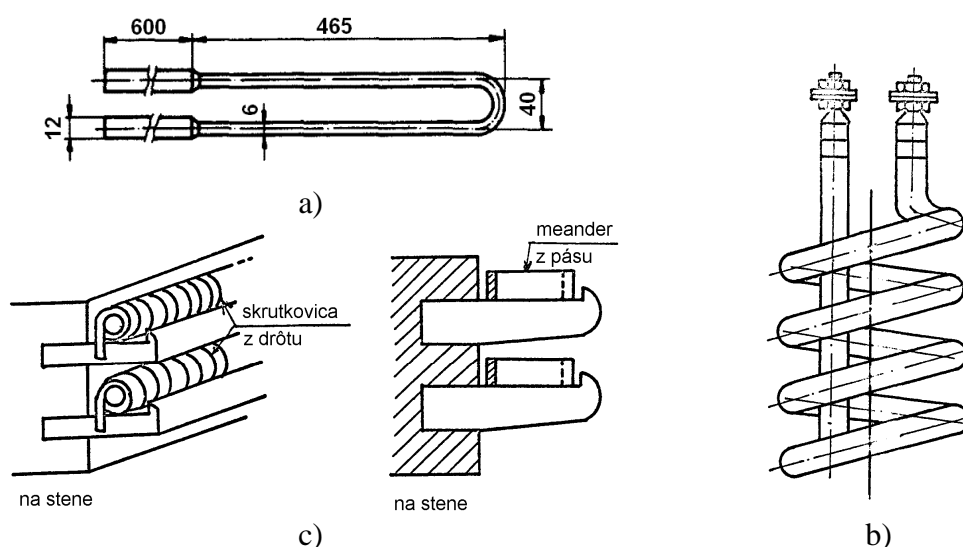
Pre najvyššie pracovné teploty odporových pecí sa používajú tiež čisté kovy, najmä molybdén (1400 až 2000 °C) a volfrám (až 2600 °C), vyžadujú však ochrannú atmosféru, resp. vákuum. Pre pracovné teploty 2500 až 3000 °C sa používajú grafitové články. Okrem menovitej pracovnej teploty výber výhrevného článku závisí od spôsobu prevádzkovania pece, od mechanických požiadaviek a možného vplyvu pecnej atmosféry.

Výberu vhodného materiálu pre výhrevné články je potrebné venovať zodpovednú pozornosť, zvlášť pre kovové články. Aj pri správnom elektrickom výpočte životnosť článkov totiž rýchlo klesá najmä nerešpektovaním nežiaducich vzájomných vplyvov medzi povrchom článkov, keramikou, na ktorej sú uložené, prípadne aj atmosférou v pecnej komore. Obrátene to platí aj pre nosiče článkov. Keramický materiál nosičov má napr. obsahovať minimálne množstvo oxidov železa, síry,  $\text{SO}_2$ , ktoré rozrušujú najmä články zo zliatin CrNi. Naopak majú mať vysoký podiel  $\text{Al}_2\text{O}_3$  a vysokú homogenitu, ktorá znižuje miestne prehriatia. Nosiče sa teda nemajú voliť len podľa stupňa žiaruvzdornosti. Podobne je treba hodnotiť aj vplyv riadenej atmosféry na materiál článkov.

### Konštrukcia a výpočet výhrevných článkov

Ako bolo skôr uvedené, nekovové výhrevné články sa vyrábajú ako hotové produkty, vo forme rôznych tvarov, s definovaným menovitým výkonom a rôznych veľkostí. Napr. silitové tyče (SiC) majú priemery od 1,2 do 5 cm, dĺžky od 12 do 200 cm. Ich životnosť je 3 až 10 tisíc pracovných hodín. Z bežných domácich spotrebičov sa nimi osadzujú známe infražiariče. Články na báze zmesi  $\text{MoSi}_2$  sú známe ako cermetové články (*ceramic, metal*), vyrábané práškovou metalurgiou. Z tohto typu článkov je vysokokvalitný KANTHAL Super, konštruovaný v tvare písmena U, so zosilnenými koncami. Napr. takýto článok s výkonom 2 kW má dĺžku aktívnej časti 40 cm pri priemere 0,6 cm. Na obr. 1 a) je naznačený uvedený typ článku.

Niektoré typy výhrevných článkov, resp. ich uloženie v pracovnej komore pece sú naznačené na obr. 1



Obr. 1 Výhrevné články: nekovový KANTHAL Super (a), kovový uzavretý článok-Backerova rúrka (b), uloženie článkov v tvare špirály a meandra (c)

Dimenzovanie nekovových článkov pre konkrétnu pec sa obmedzuje len na ich správne rozmiestnenie a na výpočet počtu kusov, t.j.

$$n = \frac{P_p}{P_{1\check{c}}} \quad (1)$$

kde  $P_p$  je vypočítaný menovitý príkon pece  
 $P_{1\check{c}}$  je menovitý výkon jedného článku

Kovové výhrevné články sa vyrábajú buď ako *uzavreté* alebo *otvorené*. Účelom uzatvorenia výhrevného vodiča je jeho ochrana od vplyvu pecnej atmosféry, ohrievaného média, prípadne ochrana pred mechanickým poškodením. V domácnostiach ich poznáme ako rúrkové články (Backerove rúrky), pre varné plochy varičov, ako články do žehličiek, do pračiek, ako ponorné špirály a pod. Na obr. 1 b) je znázornená bežná výhrevná špirála, ktorej funkciu povrchovej izolácie spĺňa  $\text{MgO}$ .

Otvorené kovové výhrevné články sa vyrábajú z polotovarov, t.j. drôtov alebo pásov, ktoré sa formujú do tvaru *špirál* alebo *meandrov* tak, aby na príslušnom úseku pracovnej komory pece (steny, sekcie, zóny), dĺžkou zodpovedali požadovanému výkonu. Správne formovaný článok musí zároveň zodpovedať podmienkam optimálneho odvodu tepla z jeho povrchu, správneho upevnenia a minimálneho styku s keramikou. Správne navrhnutá špirála

alebo meander musia minimalizovať vzájomné osalávanie, aby sa prídavne nezvyšovala teplota povrchu článku. Všeobecne pre konštrukciu špirál a meandrov platí, že so zvyšovaním pracovnej teploty ich stúpanie má byť väčšie (menšia hustota závitov, resp. vln na jednotku dĺžky). Na obr. 1 c) sú naznačené niektoré možnosti uloženia špirál a meandrov.

*Výpočet otvorených kovových výhrevných článkov spočíva v stanovení*

- dĺžky drôtu, resp. pásu
- prierezu, resp. priemeru drôtu, resp. priečných rozmerov pásu
- hmotnosti výhrevného článku
- rozmerových parametrov konečnej špirály, resp. meandra

*Vstupnými veličinami pre výpočet kovových článkov spravidla sú:*

- príkon pece, resp. príkon na jednu fázu v prípade trojfázových pecí t.j.  $P_p$ , resp.  $P_p/3$ .
- napätie pece (230 V, resp. 400 V)
- merné povrchové zaťaženie výhrevného článku (mpz)

Pre optimálnu prevádzku pece a dostatočnú životnosť článku je dôležitá dovolená hodnota mpz. Mpz je formálne definované podielom výkonu výhrevného článku a plochou jeho povrchu

$$w_{\xi} = \frac{P_{\xi}}{S_{\xi}} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (2)$$

čo fyzikálne vyjadruje hustotu tepelného toku vysálaného z povrchu článku. Pre reálny článok, t.j. so šedým povrchom platí (pozri Stefanov-Boltzmanov zákon)

$$w_{\xi, \text{id}} = q_{\xi} = c_{12} \cdot (T_{\xi}^4 - T_{\text{vs}}^4) \quad (3)$$

kde  $T_{\xi}$  je teplota povrchu článku [K]

$T_{\text{vs}}$  je teplota vsádzky [K]

$c_{12}$  je celkový koeficient sálania, závislý od stupňov čiernosti článku a vsádzky ( $\epsilon$ )

$$c_{12} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{\frac{1}{\epsilon_{\xi}} + \frac{1}{\epsilon_{\text{vs}}} - 1} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}] \quad (4)$$

Rovnica (3) presne platí pre vzájomne sálanie dvoch šedých povrchov (článku a vsádzky) dostatočne veľkých a *vzájomne rovnobežných*. Preto takto definované mpz musíme považovať za ideálne, nezohľadňujúce skutočné podmienky výmeny tepla sálaním v pracovnej komore pece. Dovoľená hodnota mpz skutočného článku je

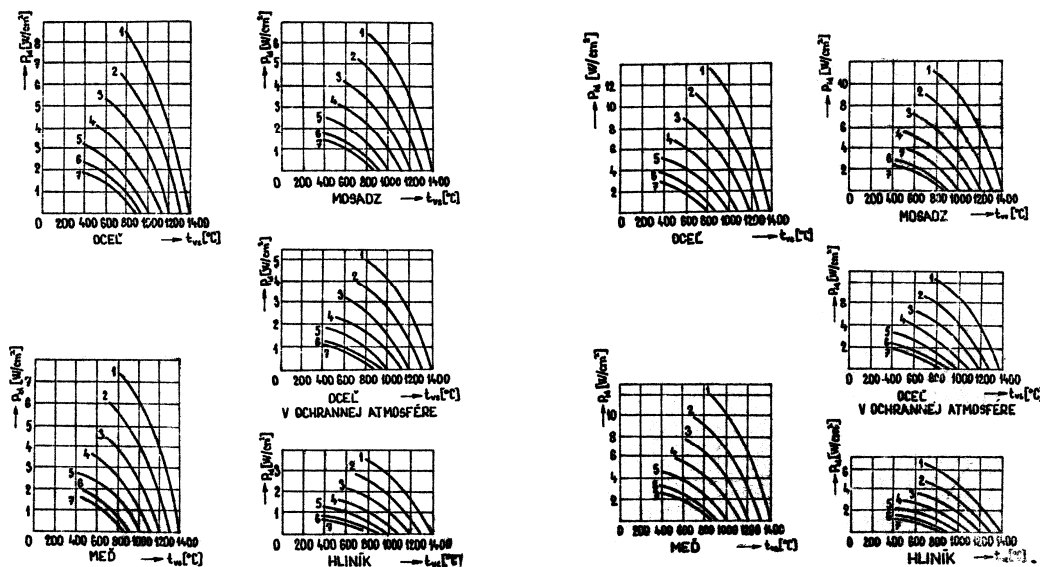
$$w_{\xi, \text{sk}} = k_{\text{ef}} \cdot w_{\xi, \text{id}} \quad (5)$$

kde  $k_{\text{ef}}$  (označovaný aj  $\phi$ ) je koeficient efektívnosti sálania, závislý od podmienok výmeny tepla sálaním medzi článkom, vsádzkou a výmurovkou pece. Pretože výrobca článkov spravidla udáva ideálnu hodnotu mpz ( $w_{\xi}$ ), koeficient  $k_{\text{ef}}$  je potrebné vypočítať. Pre výpočet existuje niekoľko spôsobov, rozdielných metodikou, náročnosťou a presnosťou.

### ***Výpočet merného povrchového zaťaženia výhrevného článku***

Zo vzťahu (3) vyplýva, že pre zvolený materiál výhrevného článku ideálne merné povrchové zaťaženie závisí od teploty článku, od teploty a absorpčných schopností vsádzky. Túto skutočnosť je možné vyjadriť pre konkrétny materiál a tvar článku ako funkciu oboch teplôt pre predpokladaný materiál vsádzky. Na nasledujúcich obrázkoch 2a a 2b sú

znázornené takéto závislosti pre dvojaký tvar voľne uložených výhrevných článkov. Na obr. 2a pre výhrevné články v tvare tyčí, na obr. 2b pre články vinuté z drôtov alebo pásov.



Obr. 2a

Obr. 2b

V oboch prípadoch priebehy majú obmedzenú platnosť na zvolené materiály vsádzky, menovite na oceľ, oceľ v ochrannej atmosfére, meď, hliník a mosadz, pre teploty článkov:

1	...	1400 °C
2	...	1300 °C
3	...	1200 °C
4	...	1100 °C
5	...	1000 °C
6	...	900 °C
7	...	850 °C

Pri voľbe druhu výhrevných článkov zohľadňujeme predovšetkým pokyny výrobcov pre správne použitie ich výrobkov. Rozhodujúca je obvykle menovitá teplota pece, chemické prostredie, v ktorom je článok inštalovaný, miesto pre jeho zabudovanie a cena článku.

1. Do teplôt 1100 °C je možné bezpečne použiť výhrevné články zo zliatin nikel-chróm, nikel-chróm-železo alebo chróm-hliník-železo.
2. Pre teploty do 1500 °C sú vhodné výhrevné články na báze karbidu kremíka, napr. Silit, Crusilit, Globar a pod.
3. Pre teploty do 1700 °C sa používajú výhrevné články na báze  $\text{MoSi}_2$  a  $\text{SiO}_2$  s lepšími elektrickými a mechanickými vlastnosťami ako predošlé (napr. KANTHAL Super).
4. V rozsahu teplôt 1800 – 2000 °C sa používajú molybdénové alebo volfrámové články, avšak s obmedzením na vákuum alebo redukčnú atmosféru.
5. Pre najvyššie teploty sa používajú grafitové články (do 2500 °C), resp. uhlíkové (do 3000 °C)

S využitím vyššie uvedených grafov pre stanovenie  $w_{\check{c},id}$  [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ] je možné skutočné merné povrchové zaťaženie určiť *orientačne* pomocou vzťahu

$$w_{\check{c},sk} = k' \cdot w_{\check{c},id} \quad (6)$$

kde koeficient  $k'$  zohľadňuje len spôsob uloženia (vzájomného tienenia) výhrevných článkov:

- pre výhrevné články uložené v žľaboch je  $k' = 0,75$
- pre výhrevné články uložené v drážkach je  $k' = 0,45$

Pre bežné technické výpočty sa používa pre výpočet  $w_{\check{c},sk}$  presnejší vzťah (5), pričom konštanta  $k_{ef} = k$  je

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \quad (7)$$

**Konštanta**  $k_1$  zohľadňuje účinnosť výmeny tepla medzi článkom a vsádzkou. Je definovaná pomerom efektívneho povrchu článku k skutočnému a závisí od tvaru a uloženia článku.

$$k_1 = \frac{S_{ef}}{S_{\check{c}}} < 1 \quad (8)$$

Hodnoty konštanty  $k_1$  určíme z tabuliek:

- a) pre články kruhového prierezu v tvare špirály, uložené v žliabkoch alebo na keramickej rúrke, kde
- $h$  je stúpanie závitů
  - $d$  je priemer drôtu
  - $D$  je priemer špirály

Tabuľka 1

$\frac{h}{d}$	1,2	2	2,5	3	3,5	4
$k_1$	0,25	0,31	0,37	0,43	0,51	0,54

- Poznámky:**
1.  $\left(\frac{h}{d}\right)_{opt} = 3$
  2. pre  $d > 1$  mm je  $\left(\frac{D}{d}\right)_{opt} = 5$  až 7

- b) pre články kruhového prierezu v tvare meandra, zavesených voľne na hákoch, kde
- $h$  je stúpanie meandra
  - $d$  je priemer drôtu
  - $T$  je šírka meandra

Tabuľka 2

$\frac{h}{d}$	5	6	7	8	9	10	11	12
$k_1$	0,67	0,71	0,75	0,79	0,82	0,84	0,85	1

- Poznámky:**
1.  $\left(\frac{h}{d}\right)_{opt} = 6$  až 9
  2.  $T_{max} = 0,6$  m pre vertikálne uloženie  
 $T_{max} = 0,45$  m pre horizontálne uloženie

- c) pre články obdĺžnikového prierezu v tvare meandra, kde
- $h$  je stúpanie meandra
  - $b$  je šírka pásu
  - $a$  je hrúbka pásu

Tabuľka 3

$\frac{h}{2b}$	0,8	1,6	2,4	3,6	4	4,8
$k_1$	0,37	0,56	0,7	0,77	0,8	0,82

- Poznámky:**
1.  $\left(\frac{h}{2b}\right)_{\text{opt}} = 1,5 \text{ až } 3$
  2.  $\frac{b}{a} = m > 1$

Uvedené hodnoty sa vzťahujú pre články uložené na bočných stenách pece. Ak sú uložené v drážkach na strope, konštanta  $k_1$  sa znižuje o 15 % pre obdĺžnikový tvar a o 30 % pre drôt v tvare špirály. Pre články uložené na dne pece sa hodnoty  $k_1$  znižujú o 30 až 50 %.

**Konštanta**  $k_2$  zohľadňuje rozmiestnenie článkov v peci a závisí od pomeru  $\frac{S_{vs}}{S_a}$ , kde  $S_a$  je „aktívna plocha“ stien pece, na ktorých sú umiestnené články;  $S_{vs}$  je tá časť povrchu vsádzky, ktorá je vystavená pôsobeniu článkov. (Ak sú články umiestnené len na bočných stenách pece,  $S_a$  je plocha bočných stien).

Tabuľka 4

$\frac{S_{vs}}{S_a}$	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$k_2$	1	0,88	0,76	0,64	0,52	0,4

**Konštanta**  $k_3$  zohľadňuje vplyv skutočného vzájomného súčiniteľa sálenia  $(c_{12})_{\text{sk}}$ , t.j.

$$\frac{1}{k_3} = \frac{(c_{12})_{\text{sk}}}{(c_{12})_{\text{id}}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_{\check{c}}} + \frac{S_{vs}}{S_a} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{vs}} - 1\right)}{\frac{1}{\varepsilon_{\check{c}}} + \frac{1}{\varepsilon_{vs}} - 1} \quad (9)$$

### Rozdelenie príkonu pece na výhrevné články

Pri rozdelení celkového príkonu pece do jednotlivých častí (sekcí, zón) je potrebné rešpektovať zásady týkajúce sa požadovaného rozloženia teploty. Väčšine pece (nad 10 kW) sa spravidla navrhujú trojfázové, preto celkový príkon sa rozdelí na diely, ktorých počet je deliteľný tromi. Podobne aj počet výhrevných článkov, ktoré sú z rovnakého materiálu a rovnakých rozmerov je deliteľný tromi. Zapájajú sa do skupín sériovo, na trojfázovú napájaciu sieť sa pripájajú paralelne do hviezdy alebo trojuholníka s možnosťou prepínania. Príkon do hviezdy je prirodzene jednotretinový z príkonu do trojuholníka.

### Výpočet rozmerov výhrevných článkov

Pri známej dovolenej hodnote mpz skutočného článku výpočet rozmerov, hmotnosti a parametrov tvaru špirály (z drôtu), resp. meandra (z pásu) je rutinný. Vychádza sa z dvoch rovníc pre výkon článku, z rovnice (2), t.j.

$$P_{\check{c}} = w_{\check{c}} \cdot S_{\check{c}} = w_{\check{c}} \cdot l \cdot o \quad [\text{W}] \quad (10)$$

a rovnice

$$P_{\check{c}} = \frac{U^2}{R_{\check{c}}} = \frac{U^2}{\rho_{\check{c}} \cdot \frac{l}{S}} \quad [\text{W}] \quad (11)$$

Ich porovnaním pre dĺžku predmetného vodiča priamo dostaneme súčin prierezu a obvodu, ako funkciu známych elektrických parametrov

$$S \cdot o = \frac{\rho_{\xi} \cdot P_{\xi}^2}{w_{\xi} \cdot U^2} \quad [\text{m}^3] \quad (12)$$

kde  $\rho_{\xi}$  je rezistivita výhrevného článku  $[\Omega \cdot \text{m}]$   
 $o$  obvod výhrevného článku;  $o = 2 \cdot \pi \cdot r$  [m]  
 $S$  prierez výhrevného článku;  $S = \pi \cdot r^2$   $[\text{m}^2]$

Zo vzťahu (10) vyplýva pre dĺžku článku, resp. skupinu článkov

$$l = \frac{U^2 \cdot S}{\rho_{\xi} \cdot w_{\xi}} = \frac{P_{\xi}}{w_{\xi} \cdot o} \quad [\text{m}^3] \quad (13)$$

Rovnica (12) umožňuje vypočítať:

a1) priemer drôtu pre článok v tvare *špirály*:

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \rho_{\xi} \cdot P_{\xi}^2}{\pi^2 \cdot w_{\xi} \cdot U^2}} \quad [\text{m}] \quad (14)$$

a2) dĺžku drôtu pre článok v tvare *špirály*:

$$l = \sqrt[3]{\frac{P_{\xi} \cdot U^2}{4 \cdot \pi \cdot \rho_{\xi} \cdot w_{\xi}^2}} \quad [\text{m}] \quad (15)$$

a3) hmotnosť drôtu pri známej mernej hmotnosti zvoleného materiálu článku

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot l \quad [\text{kg}] \quad (16)$$

Vypočítaný priemer drôtu sa zaokrúhľuje vždy k najbližšej vyššej hodnote podľa radu normalizovaných priemerov drôtov výrobcu (v mm). Najčastejšie priemery drôtov výrobcu Kanthal sú  $d = 1; 1,2; 1,5; 1,7; 1,8; 2; 2,2; 2,3; 2,5; 2,6; 2,8; 2,9; 3; 3,25; 3,5; 3,75; 4; 4,25; 4,5; 4,75; 5; 6; 6,5; 7; 7,35; 8; 8,25; 9,5; 10$  mm.

b1) rozmery pásu pre článok v tvare *meandra*.

Prierez pásu má rozmery  $a \times b$  s pomerom  $\frac{b}{a} = m > 1$ . Obvod tohto pásu má obvod  $o = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (a + a \cdot m) = 2 \cdot a \cdot (1 + m)$  a prierez pásu  $S = a \cdot b = a \cdot a \cdot m = a^2 \cdot m$ . Dosadením týchto vzťahov do výrazov (12) a (13) dostaneme

- hrúbka pásu

$$a = \sqrt[3]{\frac{\rho_{\xi} \cdot P_{\xi}^2}{2 \cdot (m+1) \cdot m \cdot w_{\xi} \cdot U^2}} \quad [\text{m}] \quad (17)$$

- šírka pásu

$$b = m \cdot a \quad [\text{m}] \quad (18)$$

b2) dĺžka pásu pre článok v tvare *meandra*

$$l = \sqrt[3]{\frac{m \cdot P_{\xi} \cdot U^2}{4 \cdot (m+1)^2 \cdot \rho_{\xi} \cdot w_{\xi}^2}} \quad [\text{m}] \quad (19)$$

b3) hmotnosť pásu – rovnako ako hmotnosť drôtu

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot a \cdot b \cdot l \quad [\text{kg}] \quad (20)$$

Pomer šírky k hrúbke pásu sa volí podľa normalizovaných rozmerov pásov výrobcu (najčastejšie:  $m = 5; 8; 10; 12$ ).

S ohľadom na zaokrúhľovanie priemeru drôtu, resp. šírky pásu do normalizovaných rozmerov je potrebné spätne kontrolovať merné povrchové zaťaženie výhrevného článku. Má zodpovedať podmienke:

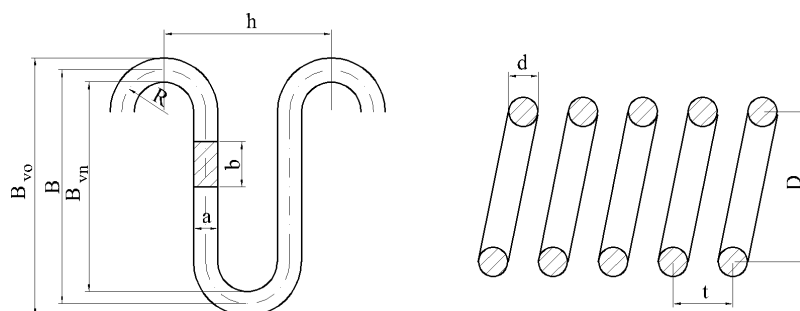
$$w_{\xi} = \frac{P_{\xi}}{l \cdot o} < w_{\text{skutočné}} \quad (21)$$

Pri rozmiestňovaní výhrevných článkov je súčasne potrebné uvážiť výkon článkov na plošnú jednotku steny pece, na ktorej sú umiestnené.

Vypočítaný priemer drôtu, resp. hrúbku a šírku pásu je potrebné korigovať na normalizované hodnoty. Tieto ako aj niektoré ďalšie praktické poznámky k výpočtu článkov a ich rozdeľovaniu do skupín z pohľadu príkonu pece sú uvedené v literatúre výrobcu.

Z rovníc (14) a (17) vyplýva jedna dôležitá skutočnosť: so znižovaním napätia na článku, zväčšuje sa aktívny prierez a znižuje dĺžka článku. Nižšie pracovné napätia sú preto výhodnejšie, lebo zvyšujú životnosť článkov (väčší prierez) a uľahčujú ich inštaláciu v pracovnej komore pece (menšia dĺžka špirály, resp. meandra).

Známe hodnoty z rovníc (14) až (20) postačujú pre výpočet ostatných geometrických parametrov konečného tvaru špirály a meandra (obr. 3).



Obr. 3 a) výhrevný meander b) výhrevná špirála

Pre tvarovanie drôtu, resp. pásu do konečnej formy výrobcu polotovaru spravidla udáva:

a) pre špirálu (obr. 3 b))

- činiteľ stúpania  $t_1 = \frac{t}{d}$  (22)

- činiteľ točenia  $r_1 = \frac{D}{d}$  (23)

Tieto určujú tvarové parametre špirály:

- stúpanie špirály  $t = t_1 \cdot d$
- stredný priemer špirály  $D = r_1 \cdot d$
- vonkajší priemer  $D_{vo} = D + d$
- vnútorný priemer  $D_{vn} = D - d$
- dĺžku jedného závitú  $l_z = \pi \cdot D$



- počet závitov špirály  $n_z = \frac{l}{l_z}$
- celková dĺžka špirály  $L_s = n_z \cdot t$

Firma KANTHAL odporúča hodnoty činiteľov stúpania  $(t_1)_{\text{opt}} = 3$ ; točenia  $(r_1)_{\text{opt}} = 5$ .

b) pre meander (obr. 3 a))

- činiteľ zakrivenia  $k_1 = \frac{R}{a}$  (24)

- činiteľ zvlnenia  $k_2 = \frac{B}{b}$  (25)

Tvarové parametre meandra sú:

- polomer zakrivenia  $R = k_1 \cdot a$
- stredná šírka meandra  $B = k_2 \cdot b$
- vonkajšia šírka  $B_{\text{vo}} = B + a$
- vnútorná šírka  $B_{\text{vn}} = B - a$
- dĺžka jednej vlny  $l_v = 2 \cdot (B - 2 \cdot R) + 2 \cdot \pi \cdot R$
- počet vln meandra  $n_m = \frac{l}{l_v}$
- krok meandra  $h = 4 \cdot R$
- celková dĺžka meandra  $L_m = n_m \cdot h$

Firma KANTHAL odporúča hodnoty činiteľov zakrivenia  $(k_1)_{\text{opt}} = 4$  až 5; zvlnenia  $(k_2)_{\text{opt}} = 2 \div 3$ .

### Príklad 1

Navrhnite výhrevné články kruhového prierezu v meandrovom uložení pre šachtovú odporovú pec valcového tvaru s vnútorným priemerom 800 mm, dĺžky 2,5 m. Pracovná teplota pece je 900 °C, príkon pece stanovený tepelným výpočtom je 75 kW. Vsádzkou je oceľový valec s priemerom 400 mm, dĺžky 2 m. Voľte výhrevné články typu CRONIX s pracovnou teplotou 1000 °C, umiestnené na bočných stenách pece. Koeficienty pomernej sálavosti článkov a vsádzky sú  $\varepsilon_{\text{vs}} = \varepsilon_{\text{č}} = 0,8$ .

Riešenie:

1. Ideálne merné povrchové zaťaženie výhrevného článku

a) ideálne merné povrchové zaťaženie absolútne čierneho článku a vsádzky ( $\varepsilon_{\text{č}} = \varepsilon_{\text{vs}} = 1$ )

$$w_{\text{č},\text{id},0} = \sigma \cdot (T_{\text{č}}^4 - T_{\text{vs}}^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot [(900 + 273)^4 - (800 + 273)^4] = 32184 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) ideálne merné povrchové zaťaženie reálneho článku a vsádzky ( $\varepsilon_{\text{č}} = 0,8$ ,  $\varepsilon_{\text{vs}} = 0,8$ )

$$w_{\text{č},\text{id}} = q_{\text{č}} = c_{12} \cdot (T_{\text{č}}^4 - T_{\text{vs}}^4) = \frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{č}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{vs}}} - 1} \cdot (T_{\text{č}}^4 - T_{\text{vs}}^4)$$

$$w_{\check{\epsilon},id} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{\frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,8} - 1} \cdot \left[ (900 + 273)^4 - (800 + 273)^4 \right] = 21456 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

## 2. Skutočné merné povrchové zaťaženie článku

a) orientačne:

$$w_{\check{\epsilon},sk} = k' \cdot w_{\check{\epsilon},id}$$

kde koeficient  $k'$  zohľadňuje len spôsob uloženia (vzájomného tienenia) výhrevných článkov:

- pre výhrevné články uložené v žľaboch je  $k' = 0,75$
- pre výhrevné články uložené v drážkach je  $k' = 0,45$

Pretože v navrhovanej peci predpokladáme ohrev z povrchu všetkých stien symetricky, zvolíme pre bočné steny  $k' = 0,75$ . Potom

$$w_{\check{\epsilon}} = 0,75 \cdot w_{\check{\epsilon},id} = 16092 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) presnejšie

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$w_{\check{\epsilon},sk} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot w_{\check{\epsilon},id}$$

kde  $k_1$  je koeficient závislý od tvaru špirály alebo meandra. Ak sa rozhodneme pre špirálu v tvare meandra pre optimálny pomer jeho stúpania (kroku) k šírke pásu  $(h/d)_{opt} = 6 \div 9$ , volíme 7 a koeficient  $k_1 = 0,75$  (viď Tabuľka 2)

$k_2$  je koeficient zohľadňujúci rozmiestnenie článkov v peci,  $k_2 = f(S_{vs}/S_a)$ , kde  $S_{vs}$  je povrch vsádzky vystavený pôsobeniu článkov,  $S_a$  je vnútorný povrch stien pece (aktívna plocha), na ktorom sú uložené články. Pre náš prípad je

$$\frac{S_{vs}}{S_{akt}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{vs} \cdot l_{vs}}{2 \cdot \pi \cdot r_{pec} \cdot l_{pec}} = \frac{\pi \cdot d_{vs} \cdot l_{vs}}{\pi \cdot d_{pec} \cdot l_{pec}} = \frac{\pi \cdot 0,4 \cdot 2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 2,5} = 0,4$$

čomu zodpovedá  $k_2 = 0,52$  (viď Tabuľka 4)

$k_3$  je koeficient zohľadňujúci skutočný vzájomný súčiniteľ sálenia, t.j.

$$\frac{1}{k_3} = \frac{(c_{12})_{sk}}{(c_{12})_{id}} = \frac{\frac{1}{\epsilon_{\check{\epsilon}}} + \frac{S_{vs}}{S_a} \cdot \left( \frac{1}{\epsilon_{vs}} - 1 \right)}{\frac{1}{\epsilon_{\check{\epsilon}}} + \frac{1}{\epsilon_{vs}} - 1} = \frac{\frac{1}{0,8} + \frac{\pi \cdot 0,4 \cdot 2}{\pi \cdot 0,8 \cdot 2,5} \cdot \left( \frac{1}{0,8} - 1 \right)}{\frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,8} - 1} = 0,9 \quad \Rightarrow$$

$$k_3 = 1,11$$

Potom

$$w_{\check{\epsilon},sk} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot w_{\check{\epsilon},id} = 0,75 \cdot 0,52 \cdot 1,11 \cdot 21456 = 9288 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Za skutočné merné povrchové zaťaženie zvolíme hodnotu  $9288 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

3. Rozdelenie príkonu pece na články. Pre príkon 75 kW volíme trojfázovú pec so zapojením výhrevných článkov do trojuholníka.

$$P_{\xi,1} = \frac{P_p}{3} = \frac{75000}{3} = 25000 \text{ W} = 25 \text{ kW}$$

4. Výpočet rozmerov a hmotnosti výhrevného článku na jednu vetvu

Počítame skupinu článkov pre príkon  $P_{\xi} = 25 \text{ kW}$  (1 fáza), napätie  $U = 400 \text{ V}$  a  $w_{\xi,sk} = 9288 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Predmetná vsádzka patrí do triedy stredno-teplotných, ktorej vyhovujú *kovové* výhrevné články. Materiál CRONIX, vyhovujúci do pracovných teplôt  $1250 \text{ }^{\circ}\text{C}$  má nasledovné parametre:

- stupeň čiernosti:  $\varepsilon_{\xi} = 0,8$
- rezistencia pri  $1000 \text{ }^{\circ}\text{C}$ :  $\rho_{\xi} = 1,15 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$
- merná hmotnosť:  $\rho_h = 8400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

- priemer drôtu

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \rho_{\xi} \cdot P_{\xi}^2}{\pi^2 \cdot w_{\xi} \cdot U^2}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1,15 \cdot 10^{-6} \cdot (25000)^2}{\pi^2 \cdot 9288 \cdot 400^2}} = 5,809 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Vypočítaný priemer drôtu zaokrúhlime na normalizovaný:

$$d = 6,3 \text{ mm}$$

- dĺžka drôtu

$$l = \sqrt[3]{\frac{P_{\xi} \cdot U^2}{4 \cdot \pi \cdot \rho_{\xi} \cdot w_{\xi}^2}} = \sqrt[3]{\frac{25000 \cdot 400^2}{4 \cdot \pi \cdot 1,15 \cdot 10^{-6} \cdot 9288^2}} = 147,5 \text{ m}$$

- hmotnosť drôtu

$$m = \rho_h \cdot V = \rho_h \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot l = 8400 \cdot \pi \cdot \left(\frac{6,3 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 \cdot 147,5 \cong 38,6 \text{ kg}$$

- stúpanie meandra pre pomer  $\frac{h}{d} = 7$

$$h = 7 \cdot d = 7 \cdot 6,3 \cdot 10^{-3} = 44,1 \text{ mm}$$

5. Kontrola merného povrchového zaťaženia

$$w'_{\xi,sk} < w_{\xi,sk}$$

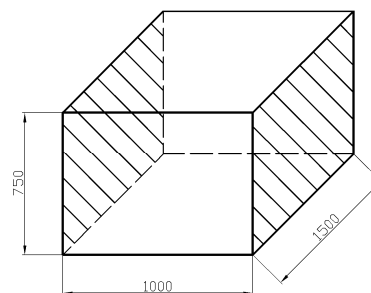
$$w'_{\xi,sk} = \frac{P_{\xi,1}}{l \cdot o} = \frac{P_{\xi,1}}{l \cdot \pi \cdot d} = \frac{25000}{147,5 \cdot \pi \cdot 6,3 \cdot 10^{-3}} = 8563,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$w'_{\xi,sk} = 8563,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} < w_{\xi,sk} = 9288 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

t.j. vyhovuje.

**Príklad 2**

Navrhnete výhrevné články pre trojfázovú žhaciu pec s výkonom 100 kW, s pracovnou teplotou pece 880 °C. Použite články typu CRONIFER s parametrami: články určené pre teplotu 1000 °C,  $\rho_{el} = 1,24 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$ ,  $\rho_m = 8400 \text{ kg} \cdot m^{-3}$ ,  $\varepsilon_{cl} = 0,8$ . Výhrevné články nech sú kruhového prierezu v tvare špirál, umiestnené na bočných stenách v žliabkoch. Pomer  $\frac{S_{vs}}{S_a} \cong 0,8$ ;  $\frac{h}{d} = 3$ . Žíhaný materiál je oceľ;  $\varepsilon_{vs} = 0,8$ . Zapojenie článkov je do trojuholníka a napätie zdroja je  $U = 400 \text{ V}$ . Výhrevné články umiestnite na 2 bočných stenách komory pece (viď obrázok).



Riešenie:

1. Ideálne merné povrchové zaťaženie reálneho článku a vsádzky ( $\varepsilon_{\xi} = 0,8$ ,  $\varepsilon_{vs} = 0,8$ )

$$w_{\xi, id} = q_{\xi} = c_{12} \cdot (T_{\xi}^4 - T_{vs}^4) = \frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{\frac{1}{\varepsilon_{\xi}} + \frac{1}{\varepsilon_{vs}} - 1} \cdot (T_{\xi}^4 - T_{vs}^4)$$

$$w_{\xi, id} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{\frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,8} - 1} \cdot [(1000 + 273)^4 - (880 + 273)^4] = 32462,1 \text{ W} \cdot m^{-2}$$

2. Skutočné merné povrchové zaťaženie článku

a) orientačne:

$$w_{\xi, sk} = k' \cdot w_{\xi, id}$$

kde koeficient  $k'$  zohľadňuje len spôsob uloženia (vzájomného tienenia) výhrevných článkov:

- pre výhrevné články uložené v žľaboch je  $k' = 0,75$
- pre výhrevné články uložené v drážkach je  $k' = 0,45$

Pretože v navrhovanej peci predpokladáme ohrev z povrchu stien symetricky, zvolíme pre bočné steny  $k' = 0,75$ . Potom

$$w_{\xi} = 0,75 \cdot w_{\xi, id} = 16092 \text{ W} \cdot m^{-2}$$

b) presnejšie

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$w_{\xi, sk} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot w_{\xi, id}$$

kde  $k_1$  je koeficient závislý od tvaru špirály alebo meandra. Ak sa rozhodneme pre výhrevný odporový drôt kruhového prierezu v tvare špirály, uložený v žliabkoch, pre optimálny pomer jeho stúpania závit (kroku) k priemeru drôtu  $(h/d)_{opt} = 3$ . Volíme teda 3 a koeficient  $k_1 = 0,43$  (viď Tabuľka 1)

$k_2$  je koeficient zohľadňujúci rozmiestnenie článkov v peci,  $k_2 = f(S_{vs}/S_a)$ , kde  $S_{vs}$  je povrch vsádzky vystavený pôsobeniu článkov,  $S_a$  je vnútorný povrch stien pece (aktívna plocha), na ktorom sú uložené články. Pre náš prípad je

$$\frac{S_{vs}}{S_{akt}} = 0,8 \text{ (zo zadania)}$$

čomu zodpovedá  $k_2 = 1$  (vid' Tabuľka 4)

$k_3$  je koeficient zohľadňujúci skutočný vzájomný súčiniteľ sálenia, t.j.

$$\frac{1}{k_3} = \frac{(c_{12})_{sk}}{(c_{12})_{id}} = \frac{\frac{1}{\epsilon_{\xi}} + \frac{S_{vs}}{S_a} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_{vs}} - 1\right)}{\frac{1}{\epsilon_{\xi}} + \frac{1}{\epsilon_{vs}} - 1} = \frac{\frac{1}{0,8} + 0,8 \cdot \left(\frac{1}{0,8} - 1\right)}{\frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,8} - 1} = 0,9667 \Rightarrow k_3 = 1,0345$$

Potom

$$w_{\xi,sk} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot w_{\xi,id} = 0,43 \cdot 1 \cdot 1,0345 \cdot 32462,1 \cong 14440 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Za skutočné merné povrchové zaťaženie zvolíme hodnotu  $14440 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

3. Rozdelenie príkonu pece na články. Pre príkon 100 kW volíme trojfázovú pec so zapojením výhrevných článkov do trojuholníka (zo zadania).

$$P_{\xi,1} = \frac{P_p}{3} = \frac{100000}{3} = 33333,3 \text{ W} = 33,333 \text{ kW}$$

4. Výpočet rozmerov a hmotnosti výhrevného článku na jednu vetvu

Počítame skupinu článkov pre príkon  $P_{\xi} = 33,333 \text{ kW}$  (1 fáza), napätie  $U = 400 \text{ V}$  a  $w_{\xi,sk} = 14440 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Predmetná vsádzka patrí do triedy stredno-teplotných, ktorej vyhovujú *kovové* výhrevné články. Materiál CRONIFER, vyhovujúci do pracovných teplôt  $1000 \text{ }^{\circ}\text{C}$  má nasledovné parametre:

- stupeň čiernosti:  $\epsilon_{\xi} = 0,8$
- rezistencia pri  $1000 \text{ }^{\circ}\text{C}$ :  $\rho_{\xi} = 1,24 \cdot 10^{-6} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$
- merná hmotnosť:  $\rho_h = 8400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

- priemer drôtu

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \rho_{\xi} \cdot P_{\xi}^2}{\pi^2 \cdot w_{\xi} \cdot U^2}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1,24 \cdot 10^{-6} \cdot (33333,3)^2}{\pi^2 \cdot 14440 \cdot 400^2}} = 6,229 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Vypočítaný priemer drôtu zaokrúhlime na normalizovaný:  $d = 6,3 \text{ mm}$

- dĺžka drôtu

$$l = \sqrt[3]{\frac{P_{\xi} \cdot U^2}{4 \cdot \pi \cdot \rho_{\xi} \cdot w_{\xi}^2}} = \sqrt[3]{\frac{33333,3 \cdot 400^2}{4 \cdot \pi \cdot 1,24 \cdot 10^{-6} \cdot 14440^2}} = 117,96 \text{ m}$$

- hmotnosť drôtu

$$m = \rho_h \cdot V = \rho_h \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot l = 8400 \cdot \pi \cdot \left(\frac{6,3 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 \cdot 117,96 \cong 30,89 \text{ kg}$$

## 5. Kontrola merného povrchového zaťaženia

$$w'_{\dot{c},sk} < w_{\dot{c},sk}$$

$$w'_{\dot{c},sk} = \frac{P_{\dot{c},1}}{l \cdot o} = \frac{P_{\dot{c},1}}{l \cdot \pi \cdot d} = \frac{33333,3}{117,96 \cdot \pi \cdot 6,3 \cdot 10^{-3}} = 14277,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$w'_{\dot{c},sk} = 14277,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} < w_{\dot{c},sk} = 14440 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

t.j. vyhovuje.

## 6. Výpočet geometrických parametrov výhrevného článku pre tvarovanie drôtu do konečnej formy (pozri obr. 3 b)):

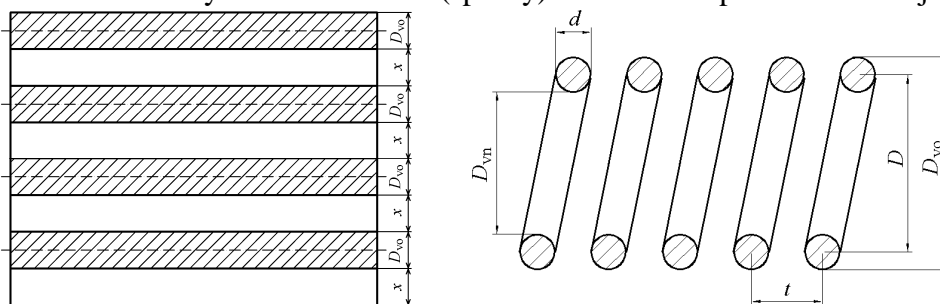
- činiteľ stúpania  $t_1 = \frac{t}{d}$
- činiteľ točenia  $r_1 = \frac{D}{d}$

Firma KANTHAL odporúča optimálne hodnoty činiteľov stúpania  $(t_1)_{opt} = 3$ ; točenia  $(r_1)_{opt} = 5$ , preto zvolíme aj my tieto odporúčané hodnoty.

Tieto určujú tvarové parametre špirály:

- stúpanie špirály  $t = t_1 \cdot d = 3 \cdot 6,3 \cdot 10^{-3} = 18,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- stredný priemer špirály  $D = r_1 \cdot d = 5 \cdot 6,3 \cdot 10^{-3} = 31,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- vonkajší priemer  $D_{vo} = D + d = 31,5 \cdot 10^{-3} + 6,3 \cdot 10^{-3} = 37,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- vnútorný priemer  $D_{vn} = D - d = 31,5 \cdot 10^{-3} - 6,3 \cdot 10^{-3} = 25,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- dĺžku jedného závitov  $l_z = \pi \cdot D = \pi \cdot 25,2 \cdot 10^{-3} = 98,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- počet závitov špirály  $n_z = \frac{l}{l_z} = \frac{117,96}{98,96 \cdot 10^{-3}} = 1192$
- celková dĺžku špirály  $L_s = n_z \cdot t = 1192 \cdot 18,9 \cdot 10^{-3} = 22,529 \text{ m}$

## 7. Kontrola umiestnenia výhrevného článku (špirály) na 1 fázu na ploche uvedenej v zadaní:



kde:  $D_{vo}$  vonkajší priemer špirály  
 $x$  medzera medzi časťami špirály (kvôli vzájomnému osalávaniu jednotlivých častí výhrevného článku). Väčšinou sa volí  $x = D_{vo}$ .

Vnútorný povrch stien pece  $S_{a,1}$  (aktívna plocha), na ktorom majú byť uložené články (na 1 fázu):

$$S_{a,1} = (x + D_{vo}) \cdot L_s = (D_{vo} + D_{vo}) \cdot L_s = 2 \cdot D_{vo} \cdot L_s = 2 \cdot 37,8 \cdot 10^{-3} \cdot 22,529 = 1,703 \text{ m}^2$$

Vnútorý povrch stien pece  $S_a$  (aktívna plocha), na ktorom majú byť uložené články (na všetky 3 fázy):

$$S_a = 3 \cdot S_{a,1} = 3 \cdot 1,703 = 5,11 \text{ m}^2$$

Požadovaná plocha pre umiestnenie výhrevných článkov je: 2 bočné steny, t.j.:

$$S_{a,dov} = 2 \cdot (0,75 \cdot 1,5) = 2,25 \text{ m}^2$$

Kontrola umiestnenia výhrevných článkov na požadovanej ploche danej v zadaní:

$$S_a < S_{a,dov}$$

$$5,11 \text{ m}^2 < 2,25 \text{ m}^2 \quad \text{čo neplatí, preto musíme uviesť alternatívy riešenia:}$$

- Zväčšíme rozmery pracovnej komory (ak je to možné).
- Umiestnime výhrevné články na zvyšných stenách (napr. na strope a dne komory pece).
- Použijeme výhrevný odporový drôt väčším merným povrchovým zaťažením (napr. KANTHAL Super).
- Zvolíme menšie medzery medzi jednotlivými sekciami špirály (nevýhoda, pretože znížime tak životnosť výhrevných článkov,  $x < D_{vo}$ ).
- Pri výpočte geometrických parametrov výhrevného článku pre tvarovanie drôtu do konečnej formy zvolíme menšie stúpanie špirály  $t < 3 \cdot d$  (na úkor životnosti výhrevných článkov).
- atď.

Po každej zvolenej alternatíve riešenia musíme vykonať kontrolu umiestnenia výhrevných článkov  $S_a < S_{a,dov}$  (prípadne vykonať ďalšiu iteráciu výpočtu), či nami navrhnuté výhrevné články vyhovujú pracovnej teplote a geometrickým rozmerom pece.

*Výpočet podľa alternatívy b)*

Umiestnenie výhrevných článkov na zvyšných stenách (napr. na strope a dne komory pece).

$$S_{a,dov} = 2 \cdot (0,75 + 1) \cdot 1,5 = 5,25 \text{ m}^2$$

Kontrola umiestnenia výhrevných článkov na požadovanej ploche danej v zadaní:

$$S_a < S_{a,dov}$$

$$5,11 \text{ m}^2 < 5,25 \text{ m}^2 \quad \text{nerovnosť platí}$$

Ak chceme použiť výhrevný odporový drôt požadovaný v zadaní musíme použiť pre umiestnenie výhrevného článku v tvare špirály aj zvyšné dve steny (na strope a dne komory pece).

### Príklad 3

Navrhnete a vypočítajte výhrevné články pre komorovú odporovú pec s výkonom 63 kW pre periodický režim ohrevu a ochladzovania vsádzky. Vsádzkou je legovaná oceľ s  $\varepsilon_{vs} = 0,82$  v tvare kocky s rozmermi  $a \times a \times a = 0,4 \times 0,4 \times 0,4$  m. V peci sa bude vsádzka ohrievať na konečnú teplotu 800 °C a potom ochladzovať. Pec má tvar kocky s dĺžkou strany 0,6 m. Výhrevné články je možné umiestniť na všetkých vnútorných stenách komory pece. Predmetná vsádzka patrí do triedy stredneteplotných, ktorej vyhovujú kovové výhrevné články. Zvoľte **pásový** materiál CRONIX, vyhovujúci do pracovných teplôt 900 °C s parametrami  $\varepsilon_c = 0,85$ ,  $\rho_c = 1,15 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ ,  $\rho_h = 8400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Zapojenie článkov je do trojuholníka a napätie zdroja je  $U = 400 \text{ V}$ .

Riešenie:

1. Ideálne merné povrchové zaťaženie reálneho článku a vsádzky ( $\varepsilon_{\check{c}} = 0,85$ ,  $\varepsilon_{vs} = 0,82$ )

$$w_{\check{c},id} = q_{\check{c}} = c_{12} \cdot (T_{\check{c}}^4 - T_{vs}^4) = \frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{\frac{1}{\varepsilon_{\check{c}}} + \frac{1}{\varepsilon_{vs}} - 1} \cdot (T_{\check{c}}^4 - T_{vs}^4)$$

$$w_{\check{c},id} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8}}{\frac{1}{0,85} + \frac{1}{0,82} - 1} \cdot [(900 + 273)^4 - (800 + 273)^4] = 23055 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

2. Skutočné merné povrchové zaťaženie článku

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$$

$$w_{\check{c},sk} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot w_{\check{c},id}$$

kde  $k_1$  je koeficient závislý od tvaru špirály alebo meandra. Ak sa rozhodneme pre meander obdĺžnikového prierezu, je pre optimálny pomer jeho stúpania (kroku) k šírke pásu  $(h/2b)_{opt} = 1,5 \div 3$ , volíme 1,6 a koeficient  $k_1 = 0,56$  (viď Tabuľka 3)

$k_2$  je koeficient zohľadňujúci rozmiestnenie článkov v peci,  $k_2 = f(S_{vs}/S_a)$ , kde  $S_{vs}$  je povrch vsádzky vystavený pôsobeniu článkov,  $S_a$  je vnútorný povrch stien pece (aktívna plocha), na ktorom sú uložené články. Pre náš prípad je

$$\frac{S_{vs}}{S_a} = \frac{6 \cdot (0,4 \cdot 0,4)}{6 \cdot (0,6 \cdot 0,6)} = 0,44 \cong 0,5$$

čomu zodpovedá  $k_2 = 0,64$  (viď Tabuľka 4)

$k_3$  je koeficient zohľadňujúci skutočný vzájomný súčiniteľ sálenia, t.j.

$$\frac{k_3}{k_3} = \frac{(c_{12})_{sk}}{(c_{12})_{id}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_{\check{c}}} + \frac{S_{vs}}{S_a} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{vs}} - 1\right)}{\frac{1}{\varepsilon_{\check{c}}} + \frac{1}{\varepsilon_{vs}} - 1} = \frac{\frac{1}{0,85} + \frac{6 \cdot (0,4 \cdot 0,4)}{6 \cdot (0,6 \cdot 0,6)} \cdot \left(\frac{1}{0,82} - 1\right)}{\frac{1}{0,85} + \frac{1}{0,82} - 1} = 0,913$$

$$k_3 = 1,0957$$

Potom

$$w_{\check{c},sk} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot w_{\check{c},id} = 0,56 \cdot 0,64 \cdot 1,0957 \cdot 23055 \cong 7073 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Za skutočné merné povrchové zaťaženie zvolíme hodnotu  $7073 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . S touto hodnotou budeme počítať pre všetky steny, hoci vieme, že na bočných stenách môžeme výhrevné články zaťažiť približne o 40 % väčším výkonom ako výhrevné články uložené na stope a dne.

3. Rozdelenie príkonu pece na články. Pre príkon 63 kW volíme trojfázovú pec so zapojením výhrevných článkov do trojuholníka (zo zadania).

$$P_{\check{c},1} = \frac{P_p}{3} = \frac{63000}{3} = 21000 \text{ W} = 21 \text{ kW}$$



## 4. Výpočet rozmerov a hmotnosti výhrevného článku na jednu vetvu (1 fázu)

Počítame skupinu článkov pre príkon  $P_{\xi} = 21 \text{ kW}$  (1 fáza), napätie  $U = 400 \text{ V}$  a  $w_{\xi,sk} = 7073 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Rozhodli sme sa pre meander obdĺžnikového prierezu, potom:

- hrúbka pásu pre  $(b/a)_{opt} = m = 10$ , bude:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\rho_{\xi} \cdot P_{\xi}^2}{2 \cdot (m+1) \cdot m \cdot U^2 \cdot w_{\xi}}} = \sqrt[3]{\frac{1,15 \cdot 10^{-6} \cdot (21 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (10+1) \cdot 10 \cdot 400^2 \cdot 7073}} = 1,268 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

zaokrúhlime na normalizovanú hrúbku  $a = a_n = 1,2 \text{ mm}$ .

- šírka pásu  $b = m \cdot a = 10 \cdot 1,2 = 12 \text{ mm}$ , zaokrúhlime na normalizovanú šírku  $b = b_n = 10 \text{ mm}$ .

- dĺžka pásu na 1 fázu (1 vetvu trojuholníka):

$$l = \sqrt[3]{\frac{P_{\xi} \cdot U^2 \cdot m}{4 \cdot (m+1)^2 \cdot \rho_{\xi} \cdot w_{\xi}^2}} = \sqrt[3]{\frac{21 \cdot 10^3 \cdot 400^2 \cdot 10}{4 \cdot (10+1)^2 \cdot 1,15 \cdot 10^{-6} \cdot 7073^2}} = 106,5 \text{ m}$$

alebo

$$l = \frac{U^2 \cdot a \cdot b}{\rho_{\xi} \cdot P_{\xi}} = \frac{400^2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{1,15 \cdot 10^{-6} \cdot 21 \cdot 10^3} = 79,5 \text{ m}$$

Dĺžku pásu 1 vetvy zvolíme  $l_{vetva} = 100 \text{ m}$ .

- hmotnosť pásu na 1 fázu

$$m_v = \rho_h \cdot V = \rho_h \cdot l_{vetva} \cdot a \cdot b = 8400 \cdot 100 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10,08 \text{ kg}$$

## 5. Kontrola merného povrchového zaťaženia

$$w'_{\xi,sk} < w_{\xi,sk}$$

$$w'_{\xi,sk} = \frac{P_{\xi,1}}{S_{\xi,1}} = \frac{P_{\xi,1}}{2 \cdot (a+b) \cdot l_{vetva}} = \frac{21000}{2 \cdot (1,2 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}) \cdot 100} = 2984,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$w'_{\xi,sk} = 2984,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} < w_{\xi,sk} = 7073 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

t.j. vyhovuje.

## 6. Výpočet geometrických parametrov výhrevného článku pre tvarovanie drôtu do konečnej formy (pozri obr. 3 a)):

- činiteľ zakrivenia  $k_1 = \frac{R}{a}$

je pomer polomeru zakrivenia meandra k hrúbke pásu, zvolíme  $k_1 = 4$ .

- činiteľ zvlnenia  $k_2 = \frac{B}{b}$

je pomer strednej šírky meandra k šírke pásu, zvolíme  $k_2 = 2$ .

Firma KANTHAL odporúča optimálne hodnoty činiteľov zakrivenia  $(k_1)_{opt} = 4$  až  $5$ ; zvlnenia  $(k_2)_{opt} = 2 \div 3$ , preto aj my sme zvolili tieto odporúčané hodnoty.

Tvarové parametre meandra sú:

- polomer zakrivenia  $R = k_1 \cdot a = 4 \cdot 1,2 = 4,8 \text{ mm}$
- stredná šírka meandra  $B_{\text{str}} = k_2 \cdot b = 2 \cdot 10 = 20 \text{ mm}$
- vonkajšia šírka  $B_{\text{vo}} = B_{\text{str}} + a = 20 + 1,2 \cong 21 \text{ mm}$
- vnútorná šírka  $B_{\text{vn}} = B_{\text{str}} - a = 20 - 1,2 \cong 19 \text{ mm}$
- dĺžka jednej vlny  
 $l_v = 2 \cdot (B_{\text{str}} - 2 \cdot R) + 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot B_{\text{str}} + 2,28 \cdot R = 2 \cdot 20 + 2,28 \cdot 4,8 = 50,94 \cong 51 \text{ mm}$
- počet vln meandra  $n_m = \frac{l}{l_v} = \frac{100}{51 \cdot 10^{-3}} \cong 1961 \text{ vln}$
- krok meandra (stúpanie)  $h = 4 \cdot R = 4 \cdot 4,8 = 19,2 \text{ mm}$
- celková dĺžka meandra  $L_m = n_m \cdot h = 1961 \cdot 19,2 \cdot 10^{-3} = 37,65 \text{ m}$

7. Kontrola umiestnenia výhrevného článku (špirály) na 1 fázu na ploche uvedenej v zadaní:

Uloženie meandrov do pracovnej komory pece

Zo zadaných rozmerov poznáme vnútorné rozmery pracovnej komory  $x = y = z = 0,6 \text{ m}$ . Potom na 1 vnútornú stenu výmurovky môžeme uložiť meander s aktívnou dĺžkou:

- pre dno a strop:

$$\frac{x}{B_{\text{vo}}} \cdot y = \frac{0,6}{21 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,6 = 17 \text{ m}$$

- pre prednú a zadnú stenu:

$$\frac{x}{B_{\text{vo}}} \cdot z = \frac{0,6}{21 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,6 = 17 \text{ m}$$

- pre bočné steny:

$$\frac{y}{B_{\text{vo}}} \cdot z = \frac{0,6}{21 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,6 = 17 \text{ m}$$

Podľa zadania úlohy sa jedná o symetrický ohrev vo všetkých smeroch, t.j. máme uložiť výhrevné články na 6 vnútorných stenách pece výmurovky. Na tieto steny môžeme spolu umiestniť meander s celkovou aktívnou dĺžkou:

$$L_{\text{real}} = 2 \cdot \left( \frac{x}{B_{\text{vo}}} \cdot y + \frac{x}{B_{\text{vo}}} \cdot z + \frac{y}{B_{\text{vo}}} \cdot z \right) = 2 \cdot (17 + 17 + 17) = 102 \text{ m}$$

Dĺžka meandra, ktorý potrebujeme umiestniť dovnútra (uvažujeme už 3 fázy):

$$L_{\text{vyp}} = 3 \cdot L = 3 \cdot 37,65 = 112,95 \text{ m}$$

Z výsledku je vidieť, že úvodnú požiadavku uloženia výhrevných článkov na uvažované steny vnútornej výmurovky pece nevieme splniť. Alternatívne môžeme postupovať takto:

a) ponechať články typu CRONIX s tým, že by sme umiestnili zvyšnú časť meandra na stenu, ktorá je voľná. Navrhovaná zmena v usporiadaní výhrevných článkov spôsobí skrátenie doby ohrevy vsádzky (viacstranný ohrev) s dopadom na zníženie tepelných strát do okolia a zvýšenie výrobnosti pece. Keďže táto alternatíva je za hranicou našich konštrukčných

možností a momentálne nevieme umiestniť zvyšnú časť meandra do 4. rozmeru (☺), túto alternatívu neuvažujeme.

b) trvať na pôvodnej požiadavke uloženia výhrevných článkov, ale pôvodne zvolený materiál CRONIX nahradiť kvalitnejším, t.j. najmä s vyššou rezistivitou a vyššou hodnotou dovoleného merného povrchového zaťaženia. Týmto požiadavkám vyhovujú odporové výhrevné materiály firmy KANTHAL. Ak sa rozhodneme pre túto alternatívu, z ponúkaného sortimentu vyhovuje materiál KANTHAL DS, s fyzikálnymi vlastnosťami:

- max. prípustná teplota:  $1150 - 1200 \text{ }^\circ\text{C}$
- rezistencia:  $\rho_\xi = 1,35 \cdot 10^{-6} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$
- merná hmotnosť:  $\rho_h = 7250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Stupeň čiernosti v katalógu firmy KANTHAL nebol udaný, preto merné povrchové zaťaženie určíme graficky, t.j. pre teplotu  $800 \div 850 \text{ }^\circ\text{C}$  je

$$w_\xi \cong 20000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Rozmery pásového meandra a jednej vetvy

Volíme znovu  $(b/a)_{\text{opt}} = m = 10$ , potom je

- hrúbka pásu pre  $(b/a)_{\text{opt}} = m = 10$ , bude:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\rho_\xi \cdot P_\xi^2}{2 \cdot (m+1) \cdot m \cdot U^2 \cdot w_\xi}} = \sqrt[3]{\frac{1,35 \cdot 10^{-6} \cdot (21 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (10+1) \cdot 10 \cdot 400^2 \cdot 20000}} = 9,457 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

zaokrúhlime na normalizovanú hrúbku  $a = a_n = 1 \text{ mm}$ .

- šírka pásu  $b = m \cdot a = 10 \cdot 1 = 10 \text{ mm}$

- dĺžka pásu na 1 fázu (1 vetvu trojuholníka):

$$l = \sqrt[3]{\frac{P_\xi \cdot U^2 \cdot m}{4 \cdot (m+1)^2 \cdot \rho_\xi \cdot w_\xi^2}} = \sqrt[3]{\frac{21 \cdot 10^3 \cdot 400^2 \cdot 10}{4 \cdot (10+1)^2 \cdot 1,35 \cdot 10^{-6} \cdot 20000^2}} = 50,5 \text{ m}$$

Dĺžku pásu 1 vetvy zvolíme  $l_{\text{vetva}} = 51 \text{ m}$ .

- hmotnosť pásu na 1 fázu

$$m_v = \rho_h \cdot V = \rho_h \cdot l_{\text{vetva}} \cdot a \cdot b = 7250 \cdot 51 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3,7 \text{ kg}$$

Tvar meandra

Pre rovnaké koeficienty zakrivenia meandra, t.j.  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 2$  dostaneme:

- polomer zakrivenia  $R = k_1 \cdot a = 4 \cdot 1 = 4 \text{ mm}$
- stredná šírka meandra  $B_{\text{str}} = k_2 \cdot b = 2 \cdot 10 = 20 \text{ mm}$
- vonkajšia šírka  $B_{\text{vo}} = B_{\text{str}} + a = 20 + 1 = 21 \text{ mm}$
- vnútorná šírka  $B_{\text{vn}} = B_{\text{str}} - a = 20 - 1 = 19 \text{ mm}$
- dĺžka jednej vlny  $l_v = 2 \cdot (B_{\text{str}} - 2 \cdot R) + 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot B_{\text{str}} + 2,28 \cdot R = 2 \cdot 20 + 2,28 \cdot 4 = 49,12 \cong 49 \text{ mm}$

- počet vln meandra  $n_m = \frac{l}{l_v} = \frac{51}{49 \cdot 10^{-3}} \cong 1041$  vln
- krok meandra (stúpanie)  $h = 4 \cdot R = 4 \cdot 4 = 16$  mm
- celková dĺžka meandra  $L_m = n_m \cdot h = 1041 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 16,66$  m

*Uloženie meandrov do pracovnej komory pece*

Na vnútorné steny pece výmurovky môžeme spolu umiestniť meander s celkovou aktívnou dĺžkou:

$$L_{\text{real}} = 2 \cdot \left( \frac{x}{B_{\text{vo}}} \cdot y + \frac{x}{B_{\text{vo}}} \cdot z + \frac{y}{B_{\text{vo}}} \cdot z \right) = 2 \cdot (17 + 17 + 17) = 102 \text{ m}$$

Dĺžka meandra, ktorý potrebujeme umiestniť dovnútra (uvažujeme už 3 fázy):

$$L_{\text{vyp}} = 3 \cdot L = 3 \cdot 16,66 = 50 \text{ m}$$

Z výsledku je vidieť, že úvodnú požiadavku uloženia výhrevných článkov na uvažované steny vnútornej výmurovky pece už vieme splniť a preto ako materiál výhrevných článkov zvolíme uvažovaný materiál od firmy KANTHAL so spomínanými parametrami.

## 9 VÝPOČET INDUKOVANÉHO TEPLA

**Zákon elektromagnetickej indukcie** (iné názvy: **druhá Maxwelllova rovnica**, Faradayov indukčný zákon, **Faradayov zákon**, indukčný zákon) je fyzikálny zákon, ktorý vyslovil v roku 1831 Michael Faraday. Tento zákon popisuje vznik elektrického napätia v uzavretom elektrickom obvode, ktorý je spôsobený zmenou magnetického indukčného toku.

Magnetická indukcia  $\mathbf{B}$  je vektorová veličina, vyjadruje silové účinky magnetického poľa na častice s nábojom.

V uzavretej vodivej slučke  $C$  sa zmenou magnetického indukčného toku plochou slučky  $S$  indukuje elektromotorické napätie. Prúd vybudovaný elektromagnetickou indukciou pôsobí proti zmene, ktorá ho vyvolala. (Lenzov zákon)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

alebo ekvivalentne v diferenciálnom tvare

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

kde  $\mathbf{E}$  je elektrické pole,  $d\mathbf{l}$  nekonečne malý prvok slučky  $C$  a  $\mathbf{B}$  je magnetická indukcia.

**Biotov-Savartov zákon** alebo **Biotov-Savartov-Laplacov zákon** opisuje magnetickú indukciu, ktorá vzniká vďaka pohybujúcemu sa náboju. Pomenovaný bol podľa dvoch francúzskych matematikov – Jean-Baptiste Biotovi a Félixovi Savartovi. Spoločne s Ampérovým zákonom o sile pôsobiacej na náboj v magnetickom poli je základným zákonom magnetostatiky.

Oersted pozoroval orientáciu magnetky v okolí vodiča pretekaného elektrickým prúdom. S pohybom elektrického náboja je vždy spojený vznik magnetického poľa, preto v okolí každého vodiča pretekaného elektrickým prúdom vzniká magnetické pole. Výpočet magnetického poľa umožňuje zákon, ktorý je zovšeobecnením experimentálnych pozorovaní Jean-Baptiste Biota (1774-1862) a Felixa Savarta (1791-1841). Tento zákon vyjadruje aký je príspevok nekonečne malého úseku tenkého vodiča k magnetickej indukcii v určitom bode v okolí vodiča. Polohu bodu vzhľadom k vybranému elementu vodiča určuje polohový vektor  $\mathbf{r}$ , element vodiča charakterizuje vektor  $d\mathbf{l}$ , ktorý je orientovaný v smere elektrického prúdu.

**Biotov-Savartov zákon** má tvar

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Matematicky tento zákon formuloval Pierre Simon de Laplace (1749-1827) a niekedy sa tiež nazýva **Biotov-Savartov-Laplaceov zákon**.

Konštanta  $\mu_0$  sa nazýva permeabilita vákua (tiež magnetická konštanta). Má presnú hodnotu a veľkosť tejto konštanty v sústave SI súvisí s definíciou ampéra. Veľkosť permeability vákua je  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ . Rozmer tejto konštanty je  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$ . Permeabilitu vákua môžeme vyjadriť aj pomocou jednotky indukčnosti 1 henry, potom jej rozmer je  $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Biotov-Savartov zákon je zákon v diferenciálnom tvare. Magnetickú indukciu v okolí určitého vodiča dostaneme integráciou elementárnych príspevkov  $d\mathbf{B}$  cez celý vodič

$$\mathbf{B} = \int_{\text{vodič}} d\mathbf{B} = \int_{\text{vodič}} \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

**Príklad 1**

Určte indukciu a intenzitu magnetického poľa v strede kruhového vodiča s polomerom  $R = 5$  cm, keď ním preteká prúd  $I = 5$  A.

*Riešenie:*

Magnetická indukcia v strede kruhového závitú A od elementu vodiča  $d\mathbf{l}$  je

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Keďže vektor  $d\mathbf{l}$  a polohový vektor  $\mathbf{r}$  zvierajú vždy uhol  $90^\circ$ , možno písať

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{ds \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{ds}{r^2}$$

A magnetická indukcia v strede kruhového závitú A od celého vodiča bude mať hodnotu

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \int_0^{2\pi r} ds = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r}$$

a smeruje kolmo pred nákresňu.

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 5 \text{ A}}{2 \cdot 0,05 \text{ m}} = 0,2 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2} = 628,319 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Intenzita magnetického poľa v strede kruhového závitú A bude:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2 \cdot r} = \frac{5 \text{ A}}{2 \cdot 0,05 \text{ m}} = 500 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

**Príklad 2**

Vypočítajte indukciu a intenzitu magnetického poľa v strede a na konci solenoidu dĺžky  $l = 1$  m, s počtom závitov  $z = 2000$  a polomerom  $R = 2$  cm, keď závitmi preteká prúd  $I = 5$  A.

*Riešenie:*

Podľa vzťahu pre magnetickú indukciu kruhového vodiča element hrúbky  $dx$ , meranej v smere osi, prispieva v ľubovoľnom bode A na osi k magnetickej indukcii hodnotou

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R}{2 \cdot (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{z}{l} \cdot dx$$

kde  $x$  je vzdialenosť elementu  $dx$  od bodu A meraná na osi solenoidu a  $\frac{z}{l}$  je počet závitov pripadajúcich na jednotkovú dĺžku solenoidu. Celý solenoid vzbudzuje teda v bode A na osi, ktorého vzdialenosť od stredu solenoidu je  $a$ , magnetickú indukciu s hodnotou

$$B = \int_{-\frac{l}{2}+a}^{+\frac{l}{2}+a} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R}{2 \cdot (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{z}{l} \cdot dx = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot z}{2 \cdot l} \cdot \left[ \frac{\frac{l}{2} - a}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{l}{2} + a\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + a}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2} + a\right)^2}} \right]$$

Keď do vzorca pre indukciu  $B$  vo všeobecnom mieste dosadíme  $a = 0$ , resp.  $a = \frac{l}{2}$ , dostaneme výrazy pre  $B$  v miestach 0, resp.  $B$ .

a)  $a = 0$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot z}{l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot R}{l}\right)^2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 5 \text{ A} \cdot 2000}{1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 0,02 \text{ m}}{1 \text{ m}}\right)^2}} \cong 4 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{z \cdot I}{l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot R}{l}\right)^2}} = \frac{5 \text{ A} \cdot 2000}{1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 0,02 \text{ m}}{1 \text{ m}}\right)^2}} = 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

b)  $a = \frac{l}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot z}{2 \cdot l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 5 \text{ A} \cdot 2000}{2 \cdot 1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{0,02 \text{ m}}{1 \text{ m}}\right)^2}} \cong \frac{2 \cdot \pi}{10^3} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2} = 2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{z \cdot I}{2 \cdot l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} = \frac{5 \text{ A} \cdot 2000}{2 \cdot 1 \text{ m} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{0,02 \text{ m}}{1 \text{ m}}\right)^2}} \cong 0,5 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

Z výsledkov je vidieť, že v prípade b) majú  $B$  a  $H$  približne polovičné hodnoty ako v prípade a).

## 10 GENEROVANÉ TEPLA V DIELEKTRIKÁCH

### *Generovanie tepla pri elektrickej polarizácii dielektrických materiálov*

Dielektrické materiály – *dielektriká* – sú elektricky nevodivé materiály. Odlišne od kovov alebo elektrolytov v ideálnom dielektriku sa nenachádzajú voľne pohybujúce náboje (elektróny, ióny, ...), ktoré by vplyvom vonkajšieho elektromagnetického poľa vyvolali vodivostný prúd. Elektrické náboje v dielektrikách sú viazané na jednotlivé atómy a molekuly a nachádzajú sa v rovnovážnom stave. Pôsobením síl vonkajšieho poľa sa však rovnovážny stav mení, vytvárajú sa *elektrické dipóly*, t.j. sústava rovnako veľkých, ale opačne nabitých elektrických nábojov, pričom ich ťažiská nie sú totožné. Ak je taká asymetria rozdelenia elektrického náboja, napr. v molekule spôsobená len vplyvom vonkajšieho poľa a po jeho odstránení zaniká, elektrické dipóly sú indukované (dočasne). Mierou nesymetrie rozdelenia elektrického náboja v dipóle je *elektrický dipólový moment*. Je to vektor vyjadrený vzťahom

$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{l} \quad [\text{C}\cdot\text{m}] \quad (1)$$

t.j. súčinom náboja dipólu  $q$  [C] a vzdialenosťou ťažísk nábojov  $l$  (so smerom od záporného ku kladnému). Vzťah platí pre bodové i rozložené náboje (pre súbory molekúl). Väčšie súbory molekúl, ktoré majú zhodne orientované dipólové momenty vytvárajú tzv. *elektrické domény*. Proces vytvárania elektrických dipólov vplyvom vonkajšieho poľa sa nazýva *polarizácia dielektrika* (dielektrická polarizácia). Mierou polarizácie dielektrika a polarizovateľnosti častíc, z ktorých je zložené, je *permitivita dielektrika*  $\varepsilon$ . V izotropnom prostredí je to skalárna veličina, vyjadrujúca vzťah medzi vektormi elektrickej indukcie  $\mathbf{D}$  a intenzity  $\mathbf{E}$  poľa

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad (2)$$

pričom  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$  (súčin absolútnej a relatívnej permitivity,  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_r$  sa pohybuje v širokých hraniciach, v závislosti od druhu dielektrika, napr. pre vzduch je  $\varepsilon_r \cong 1$ , pre destilovanú vodu  $\varepsilon_r \cong 80$ , pre perlit  $\varepsilon_r \cong 1000$ ).

Permitivita väčšiny dielektrík nezávisí od elektrickej intenzity poľa (lineárne dielektriká), ale závisí nepriamoúmerne od *frekvencie* striedavého zdroja, vytvárajúceho pole.

Dielektrické materiály, v ktorých sa nenachádza voľný elektrický náboj sú viac-menej ideálne. V reálnych dielektrikách sa vždy nachádza okrem veľkého množstva viazaných vodičov náboja aj malý počet voľných nosičov náboja, ktoré sa vplyvom vonkajšieho poľa pohybujú ako v kove, teda dielektrikum vykazuje určitú vodivosť.

Pohyb nosičov elektrického náboja dielektrika v elektrickom poli je teda rozdielny podľa toho, či nosiče sú voľné alebo viazané. Pohyb voľných nosičov je daný polaritou poľa, po jeho zániku zostávajú v mieste, na ktorom sa práve nachádzajú (nevracajú sa do pôvodnej polohy). Pohyb viazaných nábojov je iný, zodpovedajúci prúd sa prejavuje ako polarizácia dielektrika a jeho veľkosť je priamoúmerná permitivite dielektrika. Po odstránení vplyvu vonkajšieho poľa sa viazané nosiče vracajú do pôvodnej polohy. Pohyb voľných aj viazaných nosičov nábojov v dielektrikách je spoločný tým, že v oboch prípadoch je spojený s premenou energie vonkajšieho budiaceho poľa na teplo, t.j. s *dielektrickými stratami*. Podľa povahy nosičov nábojov sú teda dielektrické straty dvojaké, vodivostné a polarizačné. Ostatné môžu byť rôzne. Ak viazané elektrické náboje pri svojom pohybe sledujú zmeny striedavého poľa bez oneskorenia (brzdzenia prostredím), ich pohyb je bezstratový, polarizačné dielektrické



straty sa rovnajú nule. Ak sa však pohyb týchto nábojov oneskoruje za zmenami poľa (intenzitou  $\underline{E}$ ), dochádza k javu *elektrickej hysterézie*, či už v dôsledku ich zotrvačnosti spôsobenej ich hmotnosťou alebo v dôsledku odporu prostredia, v ktorom sa pohybujú. Polarizácia dielektrika je sprevádzaná s polarizačnými dielektrickými stratami (relaxačnými). Z pohľadu premeny elektrickej energie na užitočné teplo sú v tuhých dielektrikách polarizačné straty najdôležitejšie.

Z určitej analógie medzi magnetickou a elektrickou polarizáciou, resp. hysteréziou dá sa rovnakým postupom vyjadriť energetická bilancia premeny energie poľa na teplo generované v dielektriku. Pohltená energia elektromagnetického poľa na jednotku objemu dielektrika sa potom dá napísať rovnicou:

$$w_e = \int_{-D_{\max}}^{+D_{\max}} \underline{E} \cdot d\underline{D} + \int_{+D_{\max}}^{-D_{\max}} \underline{E} \cdot d\underline{D} \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (3)$$

Vyjadruje hustotu energie pohltenej dielektrikom z energie striedavého elektromagnetického poľa za dobu jednej periódy. Pohltená energia zvyšuje potenciálnu energiu dipólov, teplota dielektrika stúpa. Tento spôsob ohrevu sa nazýva *dielektrický ohrev*. Má charakter priameho elektrického ohrevu, s rovnomernosťou, závislou od rozloženia fázora elektrickej intenzity poľa  $\underline{E}$  v objeme dielektrika.

Tento princíp generovania tepla sa tiež využíva pri *mikrovlnovom ohreve*. Je rovnako založený na vzniku tepla v ohrievanom materiáli prostredníctvom dielektrických strát, ktoré sú rovnako spôsobené pôsobením striedavého elektromagnetického poľa. Rozdiel je v pracovných frekvenciách, ktoré pri mikrovlnovom ohreve sa pohybujú rádovo v GHz. Zdrojom potrebného elektromagnetického vlnenia s vlastnosťami koherentného žiarenia, sú kvantové generátory, tzv. MASERY (**m**icrowave **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation).

### **Rovnice elektromagnetického vlnenia a ich riešenie pre valcové nevodivé prostredie**

Vlnové rovnice pre nevodivé prostredie, ktoré vyjadrujú šírenie elektromagnetického vlnenia v prostredí definovanom konduktivitou  $\gamma$ , permeabilitou  $\mu$  a permitivitou  $\epsilon$ , podobne ako pri indukčnom ohreve, je možné napísať v tvare

$$\nabla^2 \underline{H} + k^2 \cdot \underline{H} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \cdot \underline{E} = 0 \quad (5)$$

so všeobecným riešením

$$\underline{E} = C_1 \cdot J_0(k \cdot r) + C_2 \cdot N_0(k \cdot r) \quad (6)$$

$$\underline{H} = j \cdot \frac{k}{\omega \cdot \mu} \cdot [C_1 \cdot J_1(k \cdot r) + C_2 \cdot N_1(k \cdot r)] \quad (7)$$

kde  $\underline{H}$  je fázor magnetickej zložky vlnenia

$\underline{E}$  je fázor elektrickej zložky vlnenia

$k$  je konštanta šírenia vlnenia

$J_0, J_1$  Besselove cylindrické funkcie prvého druhu, nultého, resp. prvého rádu

$N_0, N_1$  Neumannove cylindrické funkcie druhého druhu, nultého, resp. prvého rádu

Na rozdiel od vodivého prostredia ( $\gamma \gg \omega \cdot \epsilon$ ), konštantu šírenia elektromagnetického vlnenia nemôžeme zjednodušiť, ale ju uplatňujeme v plnom rozsahu, t.j.



$$k^2 = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \quad (8)$$

resp.

$$k = \sqrt{-j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \quad (9)$$

Ak pre stanovenie integračných konštánt  $C_1$  a  $C_2$  vo všeobecných riešeniach určíme hraničné podmienky zodpovedajúce valcovému tvaru dielektrika, dostaneme jednoznačné riešenia:

- pre elektrickú zložku

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \cdot J_0(k \cdot r) \quad [\text{V} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (10)$$

- pre magnetickú zložku

$$\underline{H} = j \cdot \frac{k}{\omega \cdot \mu} \cdot \underline{E}_0 \cdot J_1(k \cdot r) \quad [\text{A} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (11)$$

kde  $\underline{E}_0$  je fázor intenzity elektrického poľa v osi valca ( $r = 0$ ), daný pomerom maximálnej hodnoty napätia na doskách kondenzátora a ich vzdialenosti (hrúbky dielektrika)

$$E_0 = \frac{U_{\max}}{h} \quad [\text{V} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (12)$$

### ***Dielektrický valec s malými stratami***

Do kategórie týchto dielektrík zaradíme materiály, ktorých relatívna permitivita sa pohybuje v hraniciach 2 až 7 a stratový uhol v hraniciach 0,01 až 0,08. Na týchto materiáloch je možné prakticky uplatňovať dielektrický ohrev.

Pre takéto materiály s malými stratami je možné upraviť konštantu šírenia na tvar

$$\begin{aligned} k^2 &= -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\gamma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \left( \frac{\gamma}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon} + 1 \right) = \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \left( 1 - j \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} \right) = \\ &= \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \cdot \left( 1 - j \cdot \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

kde druhý člen v zátvorke nazývame ***stratový uhol dielektrika***

$$\text{tg } \delta = \frac{\gamma}{\omega \cdot \varepsilon} \ll 1 \quad (14)$$

Pretože je blízky nule, približne platí

$$k^2 = \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \quad (15)$$

t.j.

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\lambda \cdot f} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \quad [\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (16)$$

Potom všeobecne komplexný argument Besselových cylindrických funkcií v riešeniach (6) a (7) je reálne číslo

$$(k \cdot r) = x = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot r = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot r \quad [-] \quad (17)$$

t.j. zložky fázorov elektromagnetického vlnenia (10) a (11) sú

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \cdot J_0(x) \quad [\text{V} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (18)$$

$$\underline{H} = j \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \underline{E}_0 \cdot J_1(x) \quad [\text{A} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (19)$$

V reálnych aplikáciách dielektrického ohrevu je argument  $x$  veľmi malý, blízky nule. Pre  $x \rightarrow \infty$  sú funkcie  $J_0(x) \cong 1$ ;  $J_1(x) \cong \frac{x}{2}$ , teda nakoniec

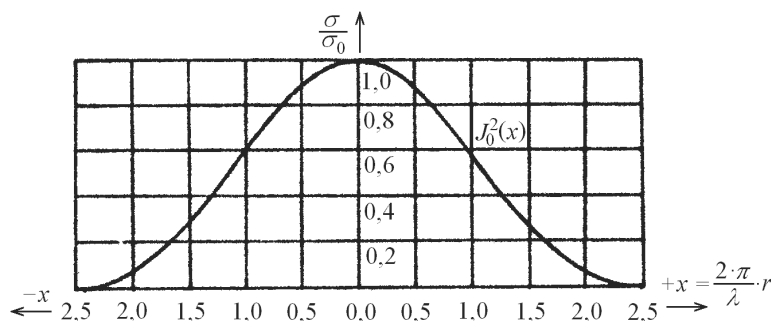
$$\underline{E} = \underline{E}_0 \quad [\text{V} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (20)$$

$$\underline{H} = j \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \underline{E}_0 \cdot \frac{x}{2} \quad [\text{A} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (21)$$

Z rovníc (20) a (21) vyplýva, že pri veľmi malom argumente  $x$  elektrické pole v dielektriku je homogénne, magnetické pole lineárne rastie s argumentom  $x$ .

### Merný a celkový generovaný výkon v dielektriku

Zodpovedá materiálovým konštantám a priebehu Besselovej funkcie  $J_0^2(x)$ .



Obr. 1 Priebeh Besselovej funkcie  $J_0^2(x)$

V osi valcového dielektrika ( $r = 0$ ) sa generuje merný výkon

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (22)$$

Potom na ľubovoľnom polomere  $r$  vyjadrenom cez argument  $x = \frac{2\pi r}{\lambda}$  je zodpovedajúci merný výkon

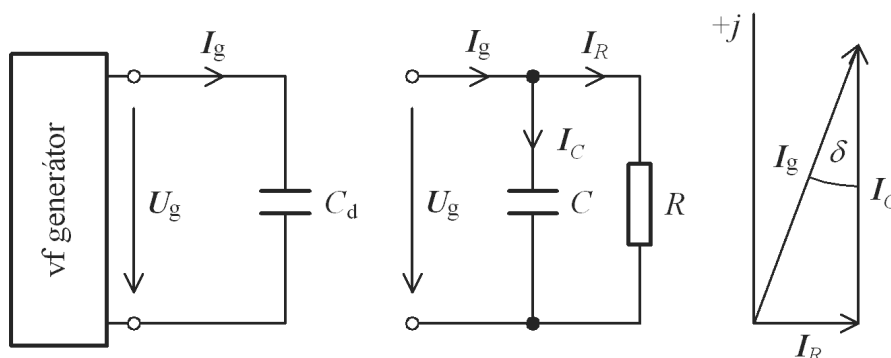
$$\sigma(x) = \sigma_0 \cdot J_0^2(x) \quad (23)$$

Znova, pre reálne prípady dielektrického ohrevu,  $x$  je blízke nule, t.j.  $J_0^2(x) \cong 1$ , teda

$$\sigma(x) = \sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 = \text{konšt.} \quad (24)$$

Z posledného výrazu vyplýva, že merný výkon v dielektriku sa generuje rovnomerne. Celkový výkon generovaný v dielektriku s polomerom  $r_1$  a hrúbke  $h$  bude

$$P = \sigma_0 \cdot V = \sigma_0 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h \quad [\text{W}] \quad (25)$$

**Principiálna a náhradná elektrická schéma dielektrického ohrevu**

Obr. 2 a) principiálna schéma b) náhradná schéma c) fázorový diagram dielektrického ohrevu

Z pripojeného fázorového diagramu prúdov náhradnej schémy (Obr. 2 c)) vyplýva

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{\frac{U_g}{R}}{U_g \cdot X_C} = \frac{1}{R \cdot \omega \cdot C} \quad [-] \quad (26)$$

Porovnaním výrazov (14) a (26) dostaneme konduktivitu dielektrika

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{R \cdot C} = \frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}{R \cdot C} \quad [\text{S} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (27)$$

kde  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  je permitivita vákua.

Náhradný odpor dielektrika  $R$  (Obr. 2 b))

$$R = \rho \cdot \frac{h}{S} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{h}{S} = \frac{U_g^2}{P} \quad [\Omega] \quad (28)$$

na ktorom sa indukuje celkový výkon v dielektriku

$$P = \frac{U_g^2}{R} = U_g \cdot I_R = U_g \cdot I_C \cdot \operatorname{tg} \delta = U_g^2 \cdot \omega \cdot C \cdot \operatorname{tg} \delta \quad [\text{W}] \quad (29)$$

kde  $U_g$  je efektívna hodnota napätia zdroja;  $U_g = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$  [V]

pričom kapacita kondenzátora je

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{h} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{h} \quad [\text{F}] \quad (30)$$

s plošným obsahom kruhovej dosky (elektrody)  $S = \pi \cdot r_1^2$  a vzdialenosťou medzi doskami kondenzátora  $h$  (hrúbka dielektrika).

Celkový výkon indukovaný v ohrievanom materiáli môžeme teda vypočítať dvoma spôsobmi. Riešením náhradnej schémy dielektrického ohrievacieho zariadenia, podľa vzťahu (29) alebo riešením elektrického poľa v dielektriku podľa vzťahu (25).

**Príklad 1**

Vypočítajte argument  $x$ , konduktivitu dielektrika  $\gamma$ , merný výkon generovaný v dielektriku  $\sigma_0$ , celkový výkon generovaný v dielektriku  $P$  a náhradný odpor dielektrika  $R$ , ak poznáme:

- relatívnu permitivitu dielektrika  $\epsilon_r = 4$
- stratový uhol dielektrika  $\text{tg } \delta = 0,05$
- hrúbku dielektrika  $h = 8 \text{ cm}$
- polomer valcového dielektrika  $r_1 = 10 \text{ cm}$
- maximálne napätie zdroja  $U_{\text{max}} = 10 \text{ kV}$
- frekvenciu napájacieho zdroja  $f = 20 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

*Riešenie:*

Argument  $x$  vlnenia v dielektriku:

$$x = k \cdot r = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \epsilon} \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot r$$

$$x = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4} \cdot 0,1 = 0,08383$$

Z výsledku vyplýva, že argument  $x$  je podstatne menší ako 1, teda elektrické pole v dielektriku je približne homogénne.

Konduktivita dielektrika:

$$\gamma = \omega \cdot \epsilon \cdot \text{tg } \delta = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \text{tg } \delta$$

$$\gamma = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 0,05 = 2,2253 \cdot 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

Merný generovaný výkon v dielektriku:

$$\sigma(x) = \sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot E_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \left( \frac{U_{\text{max}}}{h} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,2253 \cdot 10^{-4} \cdot \left( \frac{10000}{0,08} \right)^2 = 1738478,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$$

Takýto merný výkon by sa generoval v ideálne homogénnom dielektriku. Vplyv reálnej nehomogenity poľa spôsobí zmenšenie merného výkonu cca o 1 až 5 %.

Celkový výkon indukovaný v dielektriku:

$$P = \sigma_0 \cdot V = \sigma_0 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h = 1738478,8 \cdot \pi \cdot 0,1^2 \cdot 0,08 = 4369,3 \text{ W}$$

Náhradný odpor dielektrika:

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{h}{S} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{h}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{1}{2,2253 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{0,08}{\pi \cdot 0,1^2} = 11443,5 \Omega$$

alebo

$$R = \frac{U_g^2}{P} = \frac{\left( \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \right)^2}{P} = \frac{\left( \frac{10000}{\sqrt{2}} \right)^2}{4369,3} = 11443,5 \Omega$$

**Príklad 2**

Určite stratový uhol dielektrika, ak napájacia frekvencia zdroja je 20 MHz, relatívna permitivita 6, polomer prehrievaného materiálu 10 cm, jeho hrúbka 6 cm, maximálne napätie zdroja je 8 kV a v dielektriku sa generuje celkový výkon 3500 W.

Riešenie:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{R \cdot \omega \cdot C} = \frac{1}{\frac{U_g^2}{P} \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \frac{S}{h}} = \frac{1}{\left(\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \frac{S}{h}} = \frac{2 \cdot h \cdot P}{U_{\max}^2 \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot S}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2 \cdot h \cdot P}{U_{\max}^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \pi \cdot r_1^2} = \frac{h \cdot P}{U_{\max}^2 \cdot \pi^2 \cdot f \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r_1^2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{0,06 \cdot 3500}{8000^2 \cdot \pi^2 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 0,1^2} = 0,0313$$

### Príklad 3

Určite, aký má byť polomer dielektrika s relatívnou permitivitou  $\varepsilon_r = 4$ , pri ktorom môžeme elektrické pole v ňom považovať za homogénne, ak je ohrievaný kondenzátor pripojený na zdroj napätia s frekvenciou 27,12 MHz. Predpokladajte  $x < \frac{\pi}{10}$ .

Riešenie:

$$x = k \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{k} = \frac{x}{\omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{x \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}$$

$$r < \frac{x}{k} = \frac{x}{\omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{x}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}}$$

$$r < \frac{\frac{\pi}{10}}{2 \cdot \pi \cdot 27,12 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4}} = 0,27636 \text{ m}$$



## POUŽITÁ A ODPORÚČANÁ LITERATÚRA

- [1] Novák, P. – Medved', D.: *Premeny elektrickej energie*. Košice: Technická univerzita 2012. 194 s. ISBN 978-80-553-0883-8 (ISBN 978-80-8143-030-5).
- [2] Novák, P.: *Elektrické teplo*. Košice. Equilibria. 2010. ISBN 978-80-89284-48-1.
- [3] Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: *Fyzika 1 – 5*. Vydavateľstvo: Akademické nakladateľství, VUTIUM, 2007. ISBN 80-214-1868-0.
- [4] Kučerová, A. – Müllerová, J.: *Fyzika v príkladoch*. Liptovský Mikuláš 2002, ISBN 80-8040-183-7.
- [5] Mayer, D.: *Aplikovaný elektromagnetizmus*. Vydavateľstvo: Kopp, 2012. ISBN 978-80-7232-436-1.



Dušan Medveď

**PREMENY ELEKTRICKEJ ENERGIE**

Zbierka príkladov I

Vydal: Technická univerzita v Košiciach v r. 2014

Náklad: 50 ks

ISBN 978-80-553-1803-5