

**Matematické modely prvkov elektrizačnej sústavy
pre riešenie prechodných dejov**

Obsah

Ustálený stav	1
Prechodný dej	2
Frekvenčne nezávislé modely vedenia	2
Modely vedenia so sústredenými parametrami	2
Modely vedenia s rozloženými parametrami	4
Numerické riešenie frekvenčne nezávislého modelu	5
Príklad porovnania modelov so sústredenými a rozloženými parametrami.....	7
Frekvenčne závislé modely	8
Parametre vzdušného vedenia	9
Numerické riešenie frekvenčne závislého modelu	10

Matematické modely prvkov elektrizačnej sústavy pre riešenie prechodných dejov

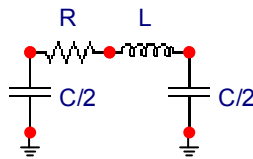
Aj matematický model je len model. Matematickými vzťahmi sa dajú teoreticky charakterizovať všetky vlastnosti modelovaného objektu, ale väčšinou, pri požadovanej presnosti určitého typu simulácie, to nie je potrebné. Významný prvok sústavy je v elektroenergetike vedenie. Na ňom je možné ukázať problematiku tvorby modelu.

Ustálený stav

Modelovanie pre simuláciu ustálených stavov striedavých obvodov vystačí často s najjednoduchším modelom, ktorým je sériové spojenie odporu a indukcie. Pre fázory prúdu a napätia platí rovnica:

$$U = (R + j \cdot X) \cdot I \quad (1)$$

Napríklad pre riešenie zemných spojení je však model potrebné doplniť o kapacitu vedenia a vznikne tak gama alebo častejšie pí článok (náhradná schéma je nakreslená programom ATPDraw):



Obr. 1 Náhradná schéma pí článku

Článok je možné popísať fázormi prúdu a napätia U_1 a I_1 , U_2 a I_2 rovnicami:

$$U_1 = (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot I_1 + U_2 \quad (2)$$

$$I_1 = \frac{j \cdot \omega \cdot C}{2} \cdot (U_1 + U_2) + I_2 \quad (3)$$

Tento model postačuje v prípade jednofázových obvodov a v prípade symetrických trojfázových obvodov, kde uvedený pí článok bude predstavovať jednopólovú náhradnú schému vedenia. Pre riešenie nesymetrických stavov by však už tento model nepostačoval a musel by sa použiť model indukčne viazaných obvodov. Ďalšia možnosť je potom využitie metódy súmerných zložiek, ktorá nesúmernú impedanciu rozloží na nulovú, súslednú a spätnú zložku. Keďže riešenie nesúmerných stavov je skôr typické pre prechodné deje, tieto budú popísané v nasledujúcom texte.

Prechodný dej

Pretože riešenie obvodov v ustálenom stave je viazané na jedinú frekvenciu siete, potom pri riešení prechodného deja môže byť rozsah frekvencií značný. V Tab. 1 je uvedený typický rozsah frekvencií pre vybrané prechodné deje.

Tab. 1 Rozsah frekvencií pre vybrané prechodné deje

Prechodný dej	Rozsah frekvencií
Zapínanie transformátorov, ferorezonancia	0,1 Hz ÷ 1 kHz
Zmena záťaže	0,1 Hz ÷ 3 kHz
Prerušenie skratov	50 Hz ÷ 3 kHz
Zapnutie do skratu, zapínanie naprázdno, opätovné zapínanie	50 Hz ÷ 20 kHz
Prechodná zložka zotaveného napätia a blízky skrat	50 Hz ÷ 100 kHz
Viacnásobný prieraz výkonového vypínača	10 kHz ÷ 1 MHz
Atmosférické prepätia, skraty v rozvodniach	10 kHz ÷ 3 MHz
Spínanie odpojovača, skraty v zapuzdrených rozvodniach	100 kHz ÷ 50 MHz

Z tabuľky je zjavné, že pomerne často nebude nutné vytvárať model vedenia pre rozsah frekvencií od desiatín hertza po desiatky megahertzov, ale bude možné sa uspokojiť s jednoduchším modelom pre požadovaný rozsah frekvencií. S rozsahom frekvencií súvisí ďalej delenie modelov na *frekvenčne nezávislé* a *frekvenčne závislé*. Frekvenčne nezávislé modely potom zahŕňujú dve kvalitatívne rozdielne skupiny a to *modely so sústredenými* a *modely s rozloženými parametrami*.

Frekvenčne nezávislé modely vedenia

Pri riešení určitého prechodného deja, nie je potrebné poznať celý priebeh, ale často je požadovaná znalosť len vybranej časovej oblasti. V elektrických sieťach tak môžu byť sledované pomalé elektromechanické prechodné deje, ale taktiež rýchle elektromagnetické (vlnové) prechodné deje. Podľa potreby sa potom môže použiť model frekvenčne nezávislý so sústredenými parametrami vypočítanými pre pracovnú frekvenciu, ktorý odpovedá sledovanej časovej oblasti. Pre veľmi rýchle prechodné deje sa potom použije frekvenčne nezávislý model vedenia s rozloženými parametrami. Modely môžu byť ďalej jedno alebo viacfázové.

Modely vedenia so sústredenými parametrami

Model pí článku podľa Obr. 1 pre trojfázové nesymetrické vedenie sa dá popísať admitančnou a impedančnou maticou, ktorá obsahuje vlastné a vzájomné prvky:

$$Y = \begin{vmatrix} j \cdot \omega \cdot C_{11} & j \cdot \omega \cdot C_{12} & j \cdot \omega \cdot C_{13} \\ j \cdot \omega \cdot C_{21} & j \cdot \omega \cdot C_{22} & j \cdot \omega \cdot C_{23} \\ j \cdot \omega \cdot C_{31} & j \cdot \omega \cdot C_{32} & j \cdot \omega \cdot C_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} R_{11} + j \cdot \omega \cdot L_{11} & R_{12} + j \cdot \omega \cdot L_{12} & R_{13} + j \cdot \omega \cdot L_{13} \\ R_{21} + j \cdot \omega \cdot L_{21} & R_{22} + j \cdot \omega \cdot L_{22} & R_{23} + j \cdot \omega \cdot L_{23} \\ R_{31} + j \cdot \omega \cdot L_{31} & R_{32} + j \cdot \omega \cdot L_{32} & R_{33} + j \cdot \omega \cdot L_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Pri využití transpozície bude vedenie symetrické a všetky vlastné prvky (s) budú rovnaké a taktiež rovnaké budú vzájomné prvky (m). Admitančné a impedančné matice pre symetrický pí článok potom budú:

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} j \cdot \omega \cdot C_s & j \cdot \omega \cdot C_m & j \cdot \omega \cdot C_m \\ j \cdot \omega \cdot C_m & j \cdot \omega \cdot C_s & j \cdot \omega \cdot C_m \\ j \cdot \omega \cdot C_m & j \cdot \omega \cdot C_m & j \cdot \omega \cdot C_s \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} R_s + j \cdot \omega \cdot L_s & R_m + j \cdot \omega \cdot L_m & R_m + j \cdot \omega \cdot L_m \\ R_m + j \cdot \omega \cdot L_m & R_s + j \cdot \omega \cdot L_s & R_m + j \cdot \omega \cdot L_m \\ R_m + j \cdot \omega \cdot L_m & R_m + j \cdot \omega \cdot L_m & R_s + j \cdot \omega \cdot L_s \end{vmatrix} \quad (7)$$

Pre úbytok napätia v jednotlivých fázach na vzdialenosti x pri odporoch a indukčnostiach v Ω/m platí:

$$-\frac{dU}{dx} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \quad (8)$$

Vlastný vektor pre transponované vedenie je známe a matica impedancie, resp. admitancie sa dá transformovať na diagonálnu:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{Z}_{\text{sym}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{T} = \begin{vmatrix} Z_{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{(1)} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Predovšetkým pre výpočty ustálených stavov sa dajú matice zjednodušiť pri zavedení súmerných zložiek. Fortescue rozložil nesúmernú trojfázovú sústavu na nulovú, súslednú a spätnú zložku pomocou jednotkového vektora $-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pre symetrický pí článok potom platia nasledujúce vzťahy medzi vlastnými a vzájomnými zložkami impedancie a medzi nulovou $Z_{(0)}$ a súslednou $Z_{(1)}$ zložkou impedancie:

$$Z_{(0)} = Z_s + 2 \cdot Z_m \quad Z_{(1)} = Z_s - Z_m \quad (11)$$

A pre úbytok napätia v zložkovej sústave platí:

$$-\frac{dU_{\text{sym}}}{dx} = Z_{\text{sym}} \cdot I_{\text{sym}} \quad (12)$$

Modely vedenia s rozloženými parametrami

Pre veľmi rýchle prechodné deje, prípadne prechodné deje na dlhých vedeniach, je nutné brať vedenie ako obvod s rozloženými parametrami. To nastane vždy, keď dĺžka vlny s najvyššou frekvenciou je omnoho kratšia, ako dĺžka vedenia. Pre element homogénneho vedenia s parametrami R , L , C a G pre jednotkovú dĺžku vedenia platí:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R \cdot i \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + G \cdot u \quad (13)$$

Jednoduchý model vedenia s rozloženými parametrami predstavuje Bergeronov model. Uvažuje bezstratové vedenie a v rovnici (13) je teda $R = G = 0$. Po úprave sa dá popísať šírenie napätia, resp. prúdu po vedení vzťahom:

$$\frac{1}{L \cdot C} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (14)$$

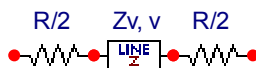
Z rovníc (13) vyplývajú dva vzťahy pre vedenie bez strát. Prvým je vlnová impedancia vedenia Z_v :

$$Z_v = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15)$$

a rovnica pre rýchlosť vln po vedení v , resp. dobu chodu vln po vedení τ pri dĺžke vedení l :

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \tau = l \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad (16)$$

Straty na vedení predstavované odporom vedenia rešpektuje potom Bergeron celkovým odporom, ktorého jedna polovica je na vstupe a druhá na výstupe modelu s rozloženými parametrami vid'. Obr. 2.



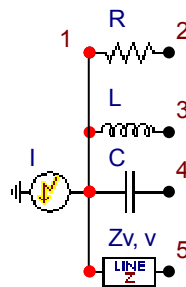
Obr. 2 Jednofázový model vedenia s rozloženými parametrami Bergeron

Na rozdiel od modelov so sústredenými parametrami, sa pri modeli s rozloženými parametrami udáva odpor vedenia, vlnová impedancia a rýchlosť šírenia vln po vedení. Pre symetrický trojfázový model vedenia sa dá využiť metóda symetrických zložiek a zadanie

nulovej a súslednej zložky parametrov; pre nesymetrický model potom ešte spätnú zložku alebo sa opäť zadajú vlastné a vzájomné parametre.

Numerické riešenie frekvenčne nezávislého modelu

Popísané modely vedenia slúžia pre vytvorenie simulačného modelu siete. To, ako uskutočňuje počítač numerický výpočet v určitom simulačnom programe, sa dá ukázať na jednoduchom obvode jednovodičových vetiev. Schéma na Obr. 3 obsahuje 5 vetiev, v prvej je prúdový zdroj, druhú tvorí odpor, tretiu indukčnosť, štvrtú kapacita a piatu vedenie s rozloženými parametrami bez strát.



Obr. 3 Schéma pre ilustráciu spôsobu výpočtu

Pre uzol 1 musí platiť rovnosť prúdov v uzle:

$$i_1(t) = i_{12}(t) + i_{13}(t) + i_{14}(t) + i_{15}(t) \quad (17)$$

Druhou vetvou potečie prúd, ktorý sa dá vyjadriť pomocou napätí uzlov:

$$i_{12}(t) = \frac{1}{R} \cdot [u_1(t) - u_2(t)] \quad (18)$$

V tretej vetve je indukčnosť a indukčný zákon je možné pri kroku výpočtu Δt napísať:

$$\frac{u(t) - u(t - \Delta t)}{2} = L \cdot \frac{i(t) - i(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (19)$$

A prúd v tretej vetve tak bude mať veľkosť:

$$i_{13}(t) = \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot [u_1(t) - u_3(t)] + hist_{13}(t - \Delta t) \quad (20)$$

Kde *hist* je hodnota prúdu v predchádzajúcom kroku výpočtu. Analogicky bude prúd štvrtej vetvy:

$$i_{14}(t) = \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot [u_1(t) - u_4(t)] + hist_{14}(t - \Delta t) \quad (21)$$

Pre piatu vetvu platia rovnice (13) až (16). Z nich pre hodnotu prúdu v 5. vetve vyplýva:

$$i_{15}(t) = \frac{1}{Z_v} \cdot [u_1(t) - u_5(t)] + hist_{15}(t - \tau) \quad (22)$$

Pritom musí platiť: $\Delta t < \tau$ a z rovnice (22) sa *hist* určí:

$$hist_{15}(t - \tau) = -\frac{1}{Z_v} \cdot u_5(t - \tau) + i_{15}(t - \tau) \quad (23)$$

Po dosadení prúdov vetiev do rovnice (17) bude:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2 \cdot L} + \frac{2 \cdot C}{\Delta t} + \frac{1}{Z_v} \right) \cdot u_1(t) - \frac{1}{R} \cdot u_2(t) - \frac{\Delta t}{2 \cdot L} \cdot u_3(t) - \frac{2 \cdot C}{\Delta t} \cdot u_4(t) - \frac{1}{Z_v} \cdot u_5(t) = \\ & = i_1(t) - hist_{13}(t - \Delta t) - hist_{14}(t - \Delta t) - hist_{15}(t - \tau) \end{aligned} \quad (24)$$

Táto jednoduchá algebrická rovnica môže byť zovšeobecnená pre ľubovoľný typ siete maticovým zápisom:

$$|\mathbf{G}| \cdot |\mathbf{u}(t)| = |\mathbf{i}(t)| \cdot |\mathbf{hist}| \quad (25)$$

V rovnici (24) pritom budú uzly so známym potenciálom (uzemnený alebo napäťový zdroj), ale taktiež uzly s neznámym potenciálom. Ich potenciál sa dá určiť riešením ustáleného stavu. Pre schému podľa Obr. 3 by v prípade striedavých obvodov boli rovnice (17) až (21) vyjadrené pomocou fázorov nasledovne:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{12} + \mathbf{I}_{13} + \mathbf{I}_{14} + \mathbf{I}_{15} \quad (26)$$

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{1}{R} \cdot (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) \quad (27)$$

$$\mathbf{I}_{13} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} \cdot (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_3) \quad (28)$$

$$\mathbf{I}_{14} = j \cdot \omega \cdot C \cdot (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_4) \quad (29)$$

Pre vedenie s rozloženými parametrami pri náhrade pí článkom sériovej a paralelnej admitancie môže byť fázor prúdu zapísaný:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}_{15} \\ \mathbf{I}_{51} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_s + \frac{Y_p}{2} & -Y_s \\ -Y_s & Y_s + \frac{Y_p}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_5 \end{vmatrix} \quad (30)$$

Pritom pre sériovú admitanciu Y_s a paralelnú Y_p homogénneho dlhého vedenia platí:

$$\frac{1}{Y_s} = l \cdot (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \frac{\sinh(\gamma \cdot l)}{\gamma \cdot l} \quad \frac{Y_p}{2} = \frac{l}{2} \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C) \cdot \frac{\operatorname{tgh}\left(\frac{\gamma \cdot l}{2}\right)}{\frac{\gamma \cdot l}{2}} \quad (31)$$

A úpravou týchto rovníc je možné pre prvky hlavnej diagonály matice v rovnici (30) napísať:

$$Y_s + \frac{Y_p}{2} = Y_s \cdot \cosh\left(\frac{\gamma \cdot l}{2}\right) \quad (32)$$

Pričom γ je činiteľ šírenia a je daný rovnicou:

$$\gamma = \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)} \quad (33)$$

Vzťahy sa ďalej zjednodušia pre vedenie bez strát, keď hyperbolické funkcie prejdú na goniometrické. Pri priemyselnej frekvencii 50 Hz a dĺžkach vedenia do 100 km budú mať funkcie sin a tg i sinh a tgh hodnotu 1 a rovnice (31) prejdú na rovnice obyčajného pí článku. Fázor prúdu „15“ z rovnice (30) je daný:

$$I_{15} = \left(Y_s + \frac{Y_p}{2} \right) \cdot U_1 - Y_s \cdot U_5 \quad (34)$$

A dosadenie do vzťahu (26) potom bude:

$$I = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} + j \cdot \omega \cdot C + Y_s + \frac{Y_p}{2} \right) \cdot U_1 - \frac{1}{R} \cdot U_2 - \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} \cdot U_3 - j \cdot \omega \cdot C \cdot U_4 - Y_s \cdot U_5 \quad (35)$$

Príklad porovnania modelov so sústredenými a rozloženými parametrami

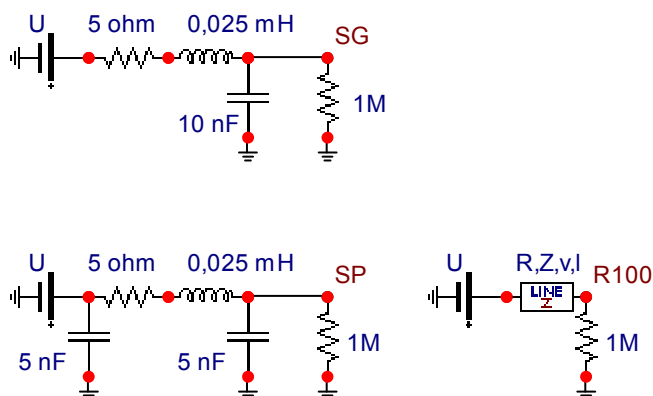
Problematiku tvorby modelu vedenia je možné ukázať na triviálnom príklade. Bude riešený prechodný dej po privedení jednotkového skoku napätia na vedení v stave naprázdno (záťaž 1 M Ω). Parametre vedenia budú: odpor 5 Ω , indukčnosť 25 μH a kapacita 10 nF.

Pre model so sústredenými parametrami sa porovná gama a pí článok a pre model so sústredenými parametrami typu Bergeron je potrebné dopočítať vlnovú impedanciu a rýchlosť vln podľa rovníc (15) a (16).

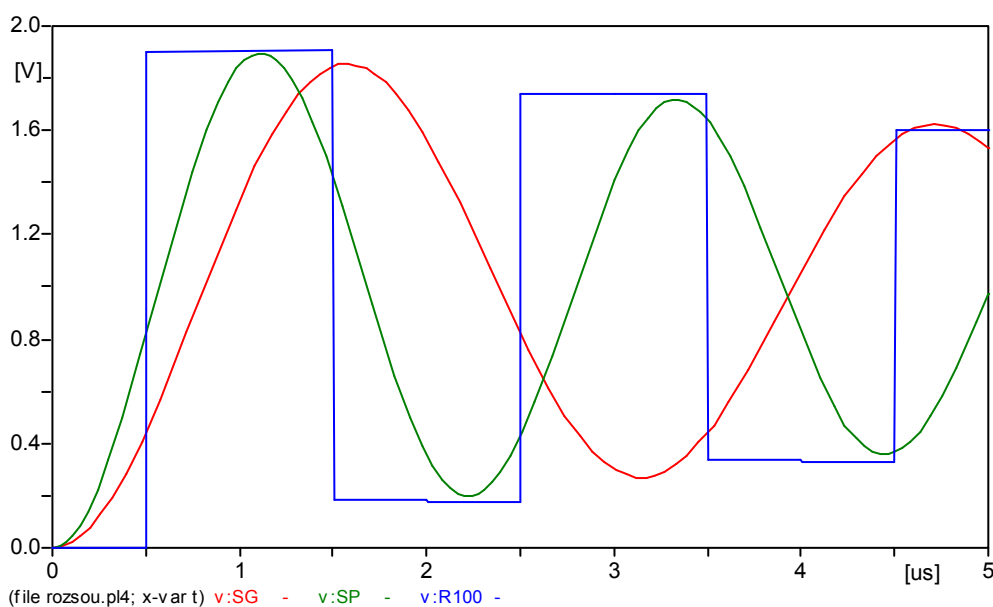
$$Z = \sqrt{\frac{25}{0,01}} = 50 \Omega \quad \tau = \sqrt{25 \cdot 0,01} = 0,5 \mu\text{s}$$

Pri zvolenej dĺžke vedenia 100 m (nemá na výpočet vplyv), bude rýchlosť vln po vedení $100/0,5 = 200 \text{ m}/\Omega\text{s}$ a merný odpor $5/100 = 50 \text{ m}\Omega/\text{m}$. Obr. 5 ukazuje priebehy napätia

na konci vedenia, SG pre model gama článku a SP pre pí článok sústredných parametrov a R100 priebeh pre rozložené parametre.



Obr. 4 Porovnanie modelov so sústrednými a rozloženými parametrami



Obr. 5 Napätie na konci vedenia v stave naprázdno po privedení jednotkového skoku na začiatok

Frekvenčne závislé modely

Parametre vedenia sa pre bežné výpočty dajú považovať za frekvenčne nezávislé, úplne to platí o vonkajšej indukčnosti a kapacite vzdušného vedenia, menej už pri káblovom vedení. Frekvenčne závislý je však odpor vedenia a vnútorná indukčnosť, kde sa uplatňuje skinefekt a pri viac vodičovom vedení jav blízkosti. Taktiež odpor zeme je frekvenčne závislý. V zadávanom úseku je vedenie uvažované ako homogénne a všeobecne preňho platia rovnice (13). Je tu však ďalší problém, ako voliť dĺžky úsekov, aby vedenie v každom z nich mohlo byť považované za homogénne. Už samotné vzdušné vedenie má pomerne iné parametre v okolí stožiaru ako v oblasti maximálneho previsu. Malý počet úsekov síce urýchli výpočet, ale môže spôsobiť chyby spriemerovaním parametrov. Naopak, príliš veľký počet úsekov zbytočne predĺži výpočet a na prechodoch medzi úsekmi bude dochádzať k odrazom, ktoré môžu vyvolať ďalšie oscilácie na vedení.

Parametre vzdušného vedenia

V rovnici (13) pre sériovú impedanciu je potrebné uvažovať s frekvenčnou závislosťou odporu a indukčnosti a všeobecne sa dá táto rovnica napísať pre vektory fázorov prúdov a napätí (voči zemi):

$$-\left|\frac{dU}{dx}\right| = |Z| \cdot |I| \quad (36)$$

Matica impedancie na jednotku dĺžky obsahuje vlastné a vzájomné prvky a sú frekvenčne závislé:

$$|Z| = |R(\omega)| + j \cdot \omega \cdot |L(\omega)| \quad (37)$$

Trojfázové vedenie je najmenej trojvodičové s jedným zemiacim lanom. Vodiče fáz sú samostatné alebo tvoria zväzok. Výška vodiča nad zemou bude vplyvom priehybu vodičov medzi stožiarmi uvažovaná ako priemerná vzťahom: výška uprostred + 1/3 priehybu. Odpor pôdy nie je nulový a dá sa korigovať napríklad pomocou Carsonovej rovnice. Pre danú frekvenciu je potrebné taktiež korigovať odpor a vnútornú indukčnosť na skin efekt. Vlastnú zložku impedancie je potom možné napísať v tvare:

$$Z_{ii} = R_{iv} + \Delta R_{ii} + j \cdot \left(\omega \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{2 \cdot h_i}{r_i} + X_{iv} + \Delta X_{ii} \right) \quad (38)$$

A podobne pre vzájomnú zložku impedancie je možné napísať (všetko v ohmoch na jednotku dĺžky):

$$Z_{ik} = Z_{ki} = \Delta R_{ik} + j \cdot \left(\omega \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{2 \cdot D_{ik}}{d_{ik}} + \Delta X_{ik} \right) \quad (39)$$

R_{iv}, X_{iv}	striedavý odpor a vnútorná indukčnosť vodiča
$\Delta R_{ii}, \Delta X_{ii}$	korekčné členy pre spätný prúd zemou
h_i, r_i	priemerná výška vodiča nad zemou a polomer vodiča
D_{ik}, d_{ik}	vzdialenosť i -teho vodiča od obrazu k -teho vodiča a vzdialenosť i -teho vodiča od k -teho vodiča
ω, μ_0	uhlová rýchlosť pre danú frekvenciu a permeabilita vákuua

Pri vzdušnom vedení sa neuvažuje zvod a kapacitná matica sa dá odvodiť pomocou metódy potenciálových koeficientov. Pre vlastné a vzájomné potenciálové koeficienty platí:

$$p_{ii} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{2 \cdot h_i}{r_i} \quad p_{ik} = p_{ki} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{2 \cdot D_{ik}}{d_{ik}} \quad (40)$$

Označenie je rovnaké ako bolo spomenuté vyššie, pričom ε_0 je permitivita vákua a kapacitná matica je inverzná k matici potenciálových koeficientov:

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{P}|^{-1} \quad (41)$$

$$-\left|\frac{dI}{dx}\right| = j \cdot \omega \cdot |\mathbf{C}| \cdot |\mathbf{U}| = |\mathbf{Y}| \cdot |\mathbf{U}| \quad (42)$$

Všeobecne sú vedenia nesymetrické, v prípade transpozície sú symetrické. Vlastný vektor pre transponované vedenie je známy a je uvedený v rovnici (9). Transformovať maticu nesymetrického vedenia na diagonálnu je obťažnejšie a vlastný vektor pre každý prípad je iný, ale problém je riešiteľný.

Numerické riešenie frekvenčne závislého modelu

Frekvenčne závislé modely vedenia sú charakterizované predovšetkým dvoma parametrami, vlnovou impedanciou a činiteľom šírenia:

$$Z_v = \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j \cdot \omega \cdot C}} \quad \gamma = \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)} \quad (43)$$

Pritom sú všeobecne všetky veličiny frekvenčne závislé, predovšetkým sériový odpor a indukčnosť. Ich frekvenčná závislosť je potom väčšia pri netočivej zložke než súslednej a pre riešenie zemného typu spojenia je dôležitá. Pre danú frekvenciu je možné písať podľa Bergerona vzťah medzi vstupnými a výstupnými hodnotami vlny postupujúcej z uzla m do uzla k, čo vyplýva z rovníc (30) až (32) pre pí článok:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{I}_{km} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh(\gamma \cdot l) & Z_v \cdot \sinh(\gamma \cdot l) \\ \frac{1}{Z_v} \cdot \sinh(\gamma \cdot l) & \cosh(\gamma \cdot l) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{U}_m \\ -\mathbf{I}_{mk} \end{vmatrix} \quad (44)$$

Rovnicu je možné po úprave napísať v tvare:

$$\mathbf{U}_k - Z_v \cdot \mathbf{I}_{km} = (\mathbf{U}_m + Z_v \cdot \mathbf{I}_{mk}) \cdot e^{-\gamma \cdot l} \quad (45)$$

V prípade bezstratového vedenia je možné upraviť exponent na:

$$\gamma \cdot l = j \cdot \omega \cdot \tau \quad (46)$$

A riešenie vo frekvenčnej oblasti transformovanej do časovej má potom tvar:

$$u_k(t) - Z_v \cdot i_{km}(t) = u_m(t - \tau) + Z_v \cdot i_{mk}(t - \tau) \quad (47)$$

Pre frekvenčne závislé modely je však ako aj vlnová impedancia, tak aj činiteľ šírenia, frekvenčne závislá a riešenie rovnice (44) je zložitejšie.